

申请上海交通大学博士学位论文

**极强外场下真空中正负电子对产生率的最优化问题研究**

**论文作者：** 董善思

**学 号：** 016072910024

**导 师 I：** 盛政明（教授）

**导 师 II：** 陈民（教授）

**申请学位：** 理学博士

**专 业：** 物理学

**所 在 单 位：** 物理与天文学院

**答 辩 日 期：** 2020 年 11 月 3 日

**授予学位单位：** 上海交通大学



Submitted in total fulfillment of the requirements for the degree of  
Philosophy Doctor in Strong-Field Physics

# **Optimization of external fields for electron-positron pair creation in vacuum**

**Author:** Shan-Si Dong

**Specialty:** Strong Field Physics

**Advisor I:** Prof. Zheng-Ming Sheng

**Advisor II:** Prof. Min Chen

School of Physics and Astronomy

Shanghai Jiao Tong University

Shanghai, P.R.China

Nov. 3, 2020



# 上海交通大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期：            年    月    日



# 上海交通大学 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 \_\_\_\_\_ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期：        年        月        日

日期：        年        月        日



# 极强外场下真空中正负电子对产生率的最优化问题研究

## 摘要

当使用超强外加静电场或电磁场时，真空有可能被击穿，并产生正负电子对，这是量子电动力学理论最重要的预测之一。世界范围内有许多实验室已投入大量资源建造新型超强激光，人们期待这些光源的强度越来越高，足以破坏真空态，验证 Schwinger 等人预测的正负电子对产生过程。其中特别值得关注的一点是通过优化外场的时空结构，以在较低场强下大幅提高正负电子对产额，这是当下强场量子电动力学的研究热点之一。本论文通过开发一种基于无限维优化计算算法，以确定外场的最优时空参数，使得在给定的外加能量范围内正负电子对的最终产额最大化。论文的主体内容分为如下四部分：

1. 通过数值求解量子场论狄拉克方程，我们研究了空间局域超临界电场导致的真空正负电子对产生过程，通过改变该外场的空间分布，搜索最优场结构，使稳态下的正负电子对产生率最大化。研究发现，对于具有单个最大值和固定总能量的电场脉冲形状，其产生率并非单调依赖于场的空间宽度；基于矩形外场形式，对原有的 Schwinger 产生率公式进行了校正，该公式可以为具有单个峰值的外场下正负电子对产生的阈值行为以及有限脉冲效应提供解析预测。

2. 通过对耦合到同一含时外力的多个相互独立系统动力学的研究，利用最优控制理论，我们得到了该外力最优化的脉冲形状，使得这些系统的集体响应同时最大化，如果以振子系统为例，这种集体响应是最终所有振幅的加权总和。特别值得注意的是，对于某些系统，此集体响应的最优力与每个系统单独响应的最优力可以解耦，因此可以先分别对这些单个外力进行优化，然后通过叠加原理，得到集体响应的最优解。运用该方法，我们首先对带阻尼的线性和非线性振子进行了数值和解析研究，然后应用于激光脉冲最优时间波形的预测，该波形可以使一组量子力学两能级原子的最终宏观

总偶极矩最大化, 该方法可以推广应用到真空中含时外场从负能级向正能级激发电子, 产生正负电子对的最优化研究。

3. 对一般含时外场下真空中正负电子对的产生开展了研究, 通过最优控制理论, 确定了一些时间脉冲形状, 使得原来在狄拉克海中具有一定动量分布的虚粒子产生正电子的产额最大化。在脉冲能量足够小或相互作用时间足够短的微扰情形下, 我们获得了与给定的终态正电子动量分布对应的最优激发外场的解析形式。对于具有任意空间依赖的超临界电场, 我们研究了稳态正负电子对产生率: 通过开发基于梯度下降的数值优化算法, 在外场能量一定的情况下, 获得了使得正电子产生率最大化外场的空间形状, 并通过利用狄拉克-哈密顿量负能量本征态之间共振的解析模型解释了其中的物理机制; 我们还发现在某些情况下, 对于给定的外场能量范围, 较小的电场有时反而会使得正负电子对产额更高。

4. 对应于真空中正负电子对产生的两种渠道, 即多光子跃迁和隧穿过程, 我们研究了同时具有时间依赖和空间依赖外场的时空共生优化关系。第一种产生机制通常是由外场随时间的变化引起的, 第二种产生机制是由具有超临界强度的随空间变化的电场引起的。在一定的参数区间范围内, 通过对外场的时间特征参数(即频率)和空间特征参数(即场的宽度和凸起高度)的同时优化, 我们发现对于正负电子对产生最优的随时间和空间变化的外场实际上类似于分别针对空间和时间做独立优化后的组合场。

**关键词:** 量子电动力学, 强场, 正负电子对产生, 最优化

# Optimization of external fields for electron-positron pair creation in vacuum

## ABSTRACT

The possibility of using super-strong external static electric or electromagnetic fields to break down the vacuum state and to generate electron-positron pairs is one of the most important predictions of quantum electrodynamics. In fact, various laboratories around the world have invested large resources into the development of new high power lasers that might become sufficiently intense to break down the vacuum state and confirm the pair-creation process predicted by Schwinger and others. It therefore seems obvious that explorations of the optimal space-time profile of the external field to maximize the final particle yield deserve some special attention. The ultimate goal would be to develop a computational algorithm (likely based on infinite-dimensional optimization) to identify the best parameter regime to maximize the particle yield in a given energy range. The main content of this thesis includes four parts:

1. By using numerical solutions to the quantum field theoretical Dirac equation, we studied the electron-positron pair-creation process from the vacuum due to a spatially localized supercritical electric field. By varying the spatial profile of this external field, we search for optimal field configurations that maximize the pair-creation rate in the steady-state. We find that for the class of pulse shapes with a single maximum and fixed total energy, the rate depends nonmonotonically on the field's spatial width. It turns out that the Schwinger rate can be modified so that it can provide analytical estimates for the threshold behavior as well as finite pulse effects.

2. We studied the dynamics of sets of independent systems, all of which are coupled to the same time-dependent external force. Using optimal control theory, we compute the most efficient temporal pulse shape for this force that can maximize the collective response of these systems simultaneously. This response can be a weighted sum of all amplitudes at the final interaction time. Remarkably, it turns out that for certain systems this optimal force for the collective response can be related to the individual forces that would optimize

each system separately. We illustrate this superposition principle for the simultaneous optimization of collective responses with numerical and analytical solutions for sets of damped linear and nonlinear oscillators. We also apply this principle to predict the optimal temporal profile of a laser pulse that can maximize the final macroscopic polarization (total dipole moment) of a set of quantum mechanical two-level atoms.

3. We examined the electron-positron pair-creation process from the vacuum for general time-dependent external fields. By applying the framework of optimal control theory, we determine those temporal pulse shapes, which can maximize the final number of created positrons for a given set of momenta. In the perturbative regime of sufficiently small pulse energies or short interaction times, we obtain analytical forms that match the computational data of the optimal fields for the chosen sets of positronic momenta. We also examined the steady-state electron-positron pair-creation rate for supercritical electric potentials with arbitrary spatial dependence. The numerical optimization algorithms predict that the set of external fields that can maximize the production rate for positrons with a given energy take nontrivial spatial shapes. We explain the underlying physical mechanisms based on a simple analytical model that exploits resonances among the negative energy eigenstates of the Dirac Hamiltonian. The results are rather encouraging from an experimental perspective as they suggest that one does not require unachievable infinitely large fields to maximize the possible pair-creation yield. In fact, in many cases smaller electric fields lead surprisingly to larger yields for given energy ranges.

4. We examined the symbiotic and non-symbiotic optimization for spatial and temporal dependent external fields in pair creation. The field-induced decay of the quantum vacuum state associated with the creation of electron-positron pairs can be caused independently by either multiphoton transitions or by tunneling processes. The first mechanism is usually induced by appropriate temporal variations of the external field while the second (Schwinger-like) process occurs if a static but spatially dependent electric field is of supercritical strength. The ultimate goal is to construct an optimal space-time profile of an electromagnetic field that can maximize the creation of particle pairs. The simultaneous optimization of parameters that characterize both fields' spatial and temporal features suggests that the optimal two-field configuration can be remarkably similar to that predicted from two independent optimizations for the spatial and temporal fields

separately.

**Keywords:** QED, strong field, pair creation, optimization

# 目 录

|   |           |
|---|-----------|
| 极强外场下真空中正负电子对产生率的最优化问题研究.....                 | I         |
| 摘 要 .....                                     | I         |
| ABSTRACT .....                                | III       |
| <b>第一章 绪论</b> .....                           | <b>1</b>  |
| 1.1 引言 .....                                  | 1         |
| 1.2 强场中的真空极化效应: .....                         | 3         |
| 1.2.1 光子-光子散射(Light-by-Light Scattering)..... | 5         |
| 1.2.2 真空双折射(Vacuum Birefringence) .....       | 5         |
| 1.2.3 极端强场条件下正负电子对的产生 .....                   | 5         |
| 1.3 数值计算方法简介 .....                            | 9         |
| 1.4 最优控制理论背景简介 .....                          | 11        |
| 1.5 论文主要内容 .....                              | 11        |
| <b>第二章 真空产生正负电子对的空间局域外场的优化</b> .....          | <b>14</b> |
| 2.1 引言 .....                                  | 14        |
| 2.2 一维空间中的计算量子场论 .....                        | 15        |
| 2.3 单峰电场包络 .....                              | 16        |
| 2.3.1 直接比较四种外场构型 .....                        | 17        |
| 2.3.2 有限的静态空间分布外场下Schwinger产生率的校正 .....       | 19        |
| 2.4 双峰电场包络 .....                              | 23        |
| 2.5 基于物理机制的最优脉冲形状估计 .....                     | 26        |
| 2.5.1 Schwinger机制.....                        | 26        |
| 2.5.2 经典力学中利用粒子占有时间的判定方法 .....                | 27        |
| 2.6 总结与展望 .....                               | 28        |
| <b>第三章 同时优化集体响应的叠加原理</b> .....                | <b>30</b> |
| 3.1 引言 .....                                  | 30        |
| 3.2 N个动力学系统集体响应的最优化控制理论 .....                 | 31        |
| 3.2.1 通用框架及其数值求解技术 .....                      | 31        |
| 3.2.2 集体响应的叠加原理 .....                         | 34        |
| 3.3 耦合阻尼谐振子的同时优化 .....                        | 34        |
| 3.4 非谐振子的SPSO .....                           | 37        |

|   |           |
|---|-----------|
| 3.5 一组被驱动的两能级原子的宏观偶极矩的SPSO .....        | 41        |
| 3.6 总结与展望 .....                         | 45        |
| <b>第四章 正负电子对产生的含时及空间依赖外场的分别优化 .....</b> | <b>47</b> |
| 4.1 真空中产生正负电子对的含时外场的无限维优化 .....         | 48        |
| 4.1.1 系统模型 .....                        | 48        |
| 4.1.2 对单一动量的优化 .....                    | 50        |
| 4.1.3 能量约束对最优化外场的影响 .....               | 55        |
| 4.1.4 集体动量状态优化的数值示例 .....               | 56        |
| 4.2 真空中正负电子对产生率的最优化超临界势 .....           | 57        |
| 4.2.1 优化算法及数值计算实现 .....                 | 57        |
| 4.2.2 最优化场的数值计算结果 .....                 | 59        |
| 4.2.3 产额放大机制的解释和建模 .....                | 61        |
| 4.2.4 基于无限维最优势场 $V_{opt}(x)$ .....      | 62        |
| 4.3 总结与展望 .....                         | 63        |
| <b>第五章 正负电子对产生的时空自由度的共生和非共生优化 .....</b> | <b>64</b> |
| 5.1 引言 .....                            | 64        |
| 5.2 共生与非共生优化 .....                      | 65        |
| 5.3 谐振子作为共生与非共生优化的原型 .....              | 67        |
| 5.3.1 同时优化及Hessian指数的引入 .....           | 67        |
| 5.3.2 通过独立优化获得的数学上的i点 .....             | 69        |
| 5.3.3 从i点出发反向追踪到真正的最优解 .....            | 70        |
| 5.3.4 无法追溯到真实最优值的孤立i点 .....             | 71        |
| 5.3.5 最大值处的最终位移 .....                   | 74        |
| 5.4 由于时间或空间激励而产生的正负电子对 .....            | 75        |
| 5.4.1 计算量子场论简述 .....                    | 75        |
| 5.4.2 仅含时外场的最优频率 .....                  | 76        |
| 5.4.3 仅随空间变化外场的最优宽度 .....               | 78        |
| 5.4.4 仅随空间变化外场的最优幅度 $V_b$ .....         | 79        |
| 5.5 同时时空激励产生正负电子对 .....                 | 81        |
| 5.5.1 同时优化场的频率和空间宽度 .....               | 82        |
| 5.5.2 同时优化场的频率和空间幅度 .....               | 84        |
| 5.6 研究总结及尚待解决的问题 .....                  | 85        |
| <b>第六章 全文总结和展望 .....</b>                | <b>87</b> |

---

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 6.1 总结 .....            | 87  |
| 6.2 展望 .....            | 89  |
| 附录A 集体响应的最优控制理论 .....   | 91  |
| 附录B 集体响应的叠加原理 .....     | 93  |
| 参 考 文 献 .....           | 95  |
| 致 谢 .....               | 103 |
| 攻读博士学位期间已发表或录用的论文 ..... | 105 |

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

激光 (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, LASER) 是二十世纪人类最重要的发明之一。由于它具有普通光源所不具备的方向性好、单色性高、相干性强以及聚焦强度高优点, 在发明之后很快便得到了广泛的应用。随着调 Q 技术、锁模技术的出现, 激光强度得到进一步提升。然而由于增益饱和等效应的限制, 整个 1970 年代激光聚焦强度一直停留在  $10^{15} \text{ W/cm}^2$  量级。直到上世纪八十年代, 啁啾脉冲放大 (Chirped Pulse Amplification, CPA) 技术发明之后, 激光强度才获得了进一步突破[1,2]。在此之后, 超强超短激光脉冲的聚焦功率密度飞速提升, 现今激光脉冲聚焦的强度已经超过  $10^{22} \text{ W/cm}^2$ [3,4]。

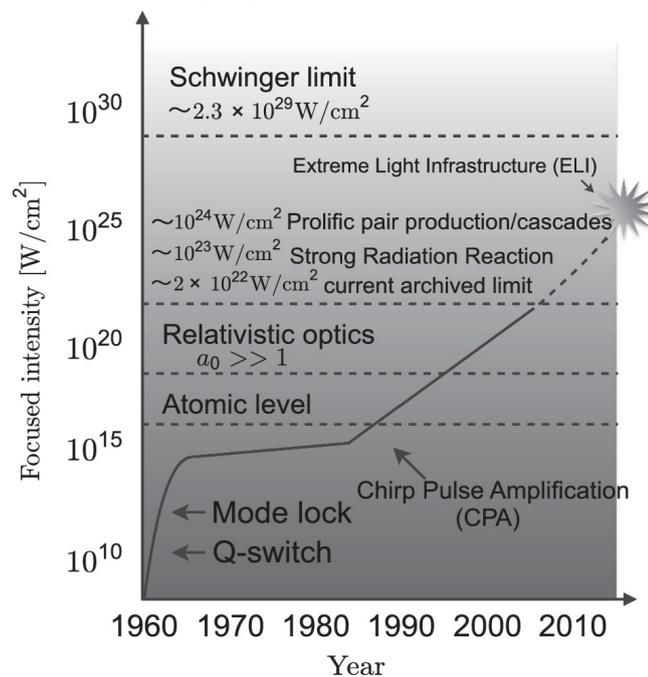


图 1-1 激光技术发展的“摩尔定律” [5]。

Fig.1-1 The “Moore's law” for laser[5].

随着激光技术的快速发展和激光聚焦强度大幅提升,激光与物质相互作用的研究范围也在不断拓展。图 1-1 显示了不同激光强度下对应的主要物理过程。当激光强度大于  $10^{14} \text{ W/cm}^2$  时,激光和物质相互作用开始出现明显的非线性效应。当激光强度达到  $10^{18} \text{ W/cm}^2$  以上时,激光与物质相互作用进入强相对论非线性光学阶段。随着激光强度进一步提升到  $10^{24} \text{ W/cm}^2$  量级,激光与物质相互作用将产生一系列新的效应,如离子运动出现明显相对论效应,辐射阻尼效应显著增强等[7]。当激光强度超过 Schwinger 条件( $10^{29} \text{ W/cm}^2$ )[8]后,激光和真空相互作用会产生正负电子对及  $\gamma$  光子,相关研究将进入极端强场非线性真空物理阶段。

近年来随着超短超强激光技术的发展,激光的峰值功率已达 10PW 量级。与此同时,强场物理研究的重点也开始逐渐从研究强激光等离子体相互作用中的相对论效应转移到强激光和等离子体以及和真空相互作用的量子电动力学(Quantum Electrodynamics, QED)效应。量子电动力学主要研究电磁场和带电粒子相互作用的基本过程:电磁相互作用的量子性质(即光子的发射和吸收)、带电粒子(例如正负电子)的产生和湮灭以及带电粒子之间的散射、带电粒子与光子之间的散射等。

以单个静止电子为例,如果归一化的激光振幅满足如下条件,电子在一个光周期内即可加速到接近光速,相对论效应不可忽略:

$$a_0 = \frac{|e||E|}{mc\omega_0} \geq 1 \quad (1-1)$$

其中  $e$  和  $m$  分别为电子的电量和静止质量,  $c$  为光速,  $|E|$  和  $\omega_0$  分别表示激光电场的振幅和激光频率。归一化的激光振幅也可以用激光波长和激光强度来表示:

$$a_0 = 0.85 \times 10^{-9} \lambda [\mu\text{m}] \sqrt{I [\text{W/cm}^2]} \quad (1-2)$$

在激光波长  $\lambda = 1\mu\text{m}$  时,  $a_0 = 1$  所对应的激光强度约为  $10^{18} \text{ W/cm}^2$ 。早在 2008 年,实验上激光峰值聚焦强度已经达到了  $2 \times 10^{22} \text{ W/cm}^2$  [4]。按照欧洲极端强激光基础设施(Extreme Light Infrastructure, ELI)的研制计划(如图 1-2 所示),激光的聚焦强度不久之后将能达到  $10^{25} \text{ W/cm}^2$  量级[6]。

| Lasers planned for the Extreme Light Infrastructure* |   |  |                  |                  |               |
|--|---|--|------------------|------------------|---------------|
| Country  | Facility focus                                  | Power (PW)   | Pulse energy (J) | Pulse width (fs) | Rep rate (Hz) |
| Romania  | Nuclear physics                                 | 10 (x2)  | 200              | 20               | 0.1           |
| Hungary  | Attosecond physics                              | 1  | 5                | 5                | 1000          |
|  |   | 20   | 400              | 20               | 0.1           |
| Czech Republic                                       | Secondary beam radiation, high-energy particles | 1  | 10               | 10               | 10            |
|  |   | 5  | 50               | 10               | 10            |
|  |   | 10 (x2)  | 200              | 20               | 0.1           |
| To be determined                                     | High intensity                                  | 10 beams of 10–20 PW each, phased and combined to create total power of 100–200 PW |                  |                  |               |
| *Laser parameters still subject to change.           |   |  |                  |                  |               |

图 1-2 欧洲极端强激光基础设施的激光器研制计划[6]。

Fig.1-2 Lasers planned for the Extreme Light Infrastructure[6].

当激光强度为  $10^{25} \text{W}/\text{cm}^2$  量级时，辐射阻尼(Radiation Reaction)效应、等离子体中正负电子对的产生(electron-positron pair creation)，以及非线性量子电动力学(nonlinear QED)等效应都可以在实验上开展研究。

## 1.2 强场中的真空极化效应：

物理学中真空可以分为两类：即经典真空（Free Space，即自由空间）和量子真空(Quantum Vacuum)。在经典物理中，真空指的是理论上完美的不含有任何物质的空间。而量子真空所描述的是一种处于最低能级态，没有任何真实粒子的空间。根据量子场论的描述，真空并不是没有物质，而是在海森堡不确定性原理所允许的范围内，虚粒子和反粒子会在极短的时间内产生和湮灭。根据不确定性原理，量子真空具有零点能(ZPE)。所谓 ZPE 是量子系统中可具有的最小能量，温度  $T=0$ 。这意味着在绝对零度时分子、原子的运动并未完全停止，系统此时拥有的运动能量就是 ZPE。

量子电动力学是一种描述电磁相互作用的量子场论，在该理论框架下，电子场的激发和消失，对应于电子的产生和湮灭，而电磁场的激发和消失，对应于光子的产生

和湮灭。如图 1-3 所示, 电子之间的相互碰撞可以形象地用费曼图(Feynman diagram)表示: 电子发射出一个虚光子, 然后被另一个电子所吸收, 这样两个电子之间通过交换虚光子发生相互作用。此时初态和末态都是可以被直接观测到的真实粒子, 而所有中间过程的粒子, 存在的时间很短, 被称为虚粒子。电磁场真空中充满着虚光子, 电子场真空中充满着虚电子-正电子对。对于这两种真空中虚粒子短暂出现和转化的过程和现象, 称为真空涨落 (vacuum fluctuations)。根据量子场论, 一个包含作用粒子的基态 (或真空态) 并不是一个空无一物的空间, 它包含了大量的存活时间很短的虚正负粒子对, 从真空中产生并彼此湮灭。部分正负粒子对带有电荷, 例如正负电子对。这类的粒子对会形成电偶极矩, 在外加电磁场的作用下粒子对会产生位移, 并且反过来影响外加电磁场, 因此外场的作用会比原先预期的来得小。这个虚粒子对转向的过程就是真空极化(vacuum polarization)。可见, 量子真空是虚光子和虚正负电子对形成的海洋。

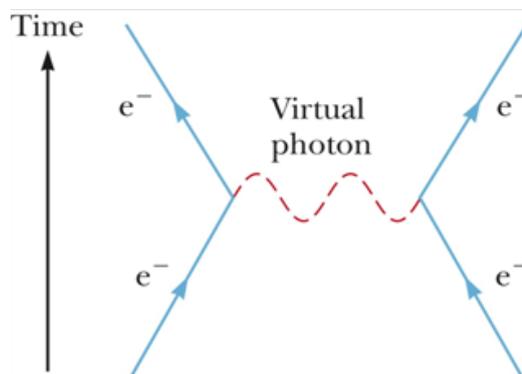


图 1-3 描述两电子相互作用交换虚光子的费曼图。

Fig.1-3 A Feynman diagram describing the exchange of a virtual photon between two electrons.

早在 QED 理论出现之前, Heisenberg, Euler, Weisskopf 等人就在真空涨落的基础上通过理论推导得到了一些非线性效应[9, 10]。1949~1951 年间, J. Schwinger 在强场真空极化方面做出了一系列开创性的工作[11]。典型的强场真空极化效应有以下几种:

### 1.2.1 光子-光子散射(Light-by-Light Scattering)

不同于经典物理中两束激光在真空中碰撞不会相互影响，在量子真空中，光子是可以与虚正负电子对相互作用的，在这一过程中，量子真空中涨落的虚粒子对作为中介介质使光子间的能量和动量发生交换，因此两个或多个光子可以发生散射。欧洲核子中心(CERN)的 ATLAS 探测器发现了高能量下光子被光子散射的首个直接证据，研究成果于 2017 年发表在 *Nature Physics* 期刊上[12]。当大型强子对撞机发出铅离子束时，周围会产生大量光子，铅离子到达 ATLAS 探测器并在其中心相遇时，其中可能会有极少的光子发生散射。在 2015 年进行的超过 40 亿次实验中，ATLAS 探测器发现了 13 个光子间散射的候选目标。统计结果显示标准偏差为 4.4，可以作为报告高能现象下光子间散射的第一个直接证据。

### 1.2.2 真空双折射(Vacuum Birefringence)

在 QED 中，在电磁场中电子-正电子场真空的相互作用导致电磁场的相互作用（特别是导致光子之间的相互作用）。由于光子之间非线性的相互作用（也就是电磁场之间非线性的相互作用）使得光波穿过一个加了强场（一般用强磁场）的真空区域时会发生双折射的现象：不同偏振方向上的光传播速度不同，从而导致不同偏振方向上的折射率也是不同的。这导致一束光可在真空中通过折射分成两束，称为真空双折射效应[13]。

### 1.2.3 极端强场条件下正负电子对的产生

由于 QED 理论能对相关的物理量提供非常精确的预测（例如电子的反常磁矩及氢原子能级的兰姆位移等理论预测都先后被实验所验证），它的各种预言都受到了科学家们的高度重视。强场条件下 QED 的一个重要预言就是在真空中可以激发出正负电子对。1996 年，美国斯坦福直线加速器中心的 D. L. Burke 等人完成了一个通过电磁相互作用产生正负电子对的实验[14]。实验中由高能电子的非线性康普顿效应产生

高能光子，然后和激光对撞产生了正负电子对。不过这一实验是通过强激光与物质相互作用来产生正负电子对的，与 QED 理论预言的真空中正负电子对产生的直接实验验证还有一定的差距，目前还没有直接通过激光场而不需要借助于重离子或者电子束就产生正负电子对的实验。

真空中正负电子对产生最早的研究可以追溯到 1928 年, P. A. Dirac 当时得到了单电子的相对论性波动方程，并求出了自由场下电子的平面波解[15]。然而 Dirac 方程同时也给出了负能解，负能解的存在给狄拉克的单粒子解释带来了很大的困难，因为原子将不会保持在稳定状态，会在极短时间内衰变，而这并不符合客观事实。为了解决该问题，狄拉克通过假设所有负能量连续态都被电子占据来解决了这个难题，如图 1-4 左图所示。

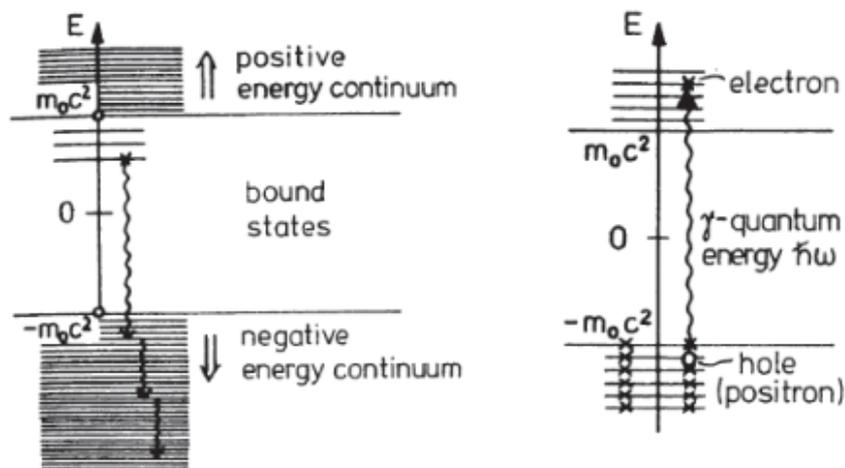


图 1-4 狄拉克海的物理图像[16]。(a)每一个态包含两个电子，一个自旋向上，一个自旋向下。这个狄拉克海表示真空；(b)一个能量大于  $2mc^2$  的光子产生了一个电子-正电子空穴组态 ( $e^- - e^+$  粒子对)。该空穴被解释为一个正电子。

Fig.1-4 Picture of the Dirac sea[16]. (a) Each state contains two electrons, one with spin up and one with spin down. This "Dirac sea" represents the vacuum;(b) A photon of energy  $h\omega > 2mc^2$  creates an electron - electron-hole configuration ( $e^- - e^+$  pair creation). The hole is interpreted as a positron.

真空态的特征在于不存在真实电子，只有能量  $E$  处于  $E < -mc^2$  的负能海被负能电子所占据，而  $E > mc^2$  的正能态为空。换句话说，真空的这一特性由能量  $E_F = mc^2$  的费米表面所决定，由于泡利不相容原理，处于正能连续态的电子向负能态的跃迁被

阻止，从而保证了原子的稳定性。另一方面，这一全新的物理图景也意味着新的物理过程。例如，如果能量  $E > 2mc^2$  的光子被负能态的电子（也称为“狄拉克海 Dirac sea”）吸收，则电子可以被提升至正能连续态，从而留下图 1-3 右图中在狄拉克海中的一个空穴。因此，光子会形成由电子及其空穴组成的对。根据电荷守恒，空穴具有与电子质量电量相同但电荷相反的粒子的性质，被称为正电子(positron)。这一整套理论被称为狄拉克空穴理论(Dirac hole theory)。

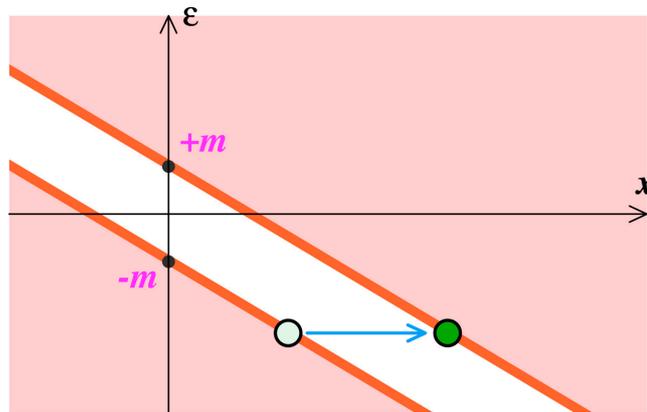


图 1-5 隧穿效应产生正负电子对的示意图。白色区间为正电子狄拉克海和正能量电子连续态之间的间隙，在电势为  $V(x) = -Ex$ ，场强为  $E$  的外部电场中发生了倾斜[20]。

Fig.1-5 Schematic picture of the pair creation by the tunneling process. The white band is the gap between the anti-electron Dirac sea and the positive energy electron continuum, tilted by the potential  $V(x) = -Ex$  in the presence of an external electrical field  $E$ [20].

1929 年，O. Klein 首先指出，相对论量子力学方程（K-G 方程和 Dirac 方程）作为单粒子波函数方程求解时，经常会出现粒子流密度不守恒的现象[17]。这一类现象统称为克莱因佯谬 (Klein paradox)。克莱因佯谬认为，相对论性粒子可以很轻易地穿越又高又宽的势垒，成功率高达 100%。粒子遇到势垒时，就会转换成它的反粒子。反粒子能轻易通过势垒，到达势垒的另外一边后，再变回普通粒子，看上去就像是没有任何障碍一样。Klein 佯谬暗示：量子理论本质上是个粒子数不守恒的多体理论。1931 年 F. Sauter 在求解 Sauter 势静电场下的 Dirac 方程时发现真空的正负能带在电场下发生了弯曲，当场强足够大时还会发生能级交叠[18]。此时，根据量子隧穿效应，负能带中的负能电子就有一定的概率隧穿到正能带形成电子，与此同时在负能带中留下一

个空穴，此即为空穴理论中的正电子。1932年加州理工学院的 Carl D. Anderson 等人通过实验证实了正电子的存在[19]。图 1-5 为在强场下通过隧穿效应在真空产生正负电子对的物理图像。

因此，强场作用下真空中正负电子对产生率就可以通过量子隧穿的透射系数得到。J. Schwinger 在 1949-1951 年间，通过固有时(proper time)的方法，得到在近似无限空间上均匀分布静电场的条件下，真空的极化几率以及相应的正负电子对产生率[21]。当外加到真空的电场强度达到 Schwinger 临界场强：

$$E_s = m^2 c^3 / e \hbar = 1.3 \times 10^{16} \text{ V/cm} \quad (1-3)$$

时，可以从真空中显著地直接产生正负电子对。在外加电场为  $E$  时，单位时间内正负电子对的产生率  $\Gamma$  为：

$$\Gamma \propto \exp(-\pi E/E_s) \quad (1-4)$$

由(1-4)式可看出，对于弱场来说，正负电子对产生率是指数下降的。当外场强度  $E$  大于临界场强  $E_s$  的时候真空变得不再稳定，正负电子对会显著地产生。由于 Schwinger 的发现，强场下真空通过隧穿效应产生正负电子对的过程又被称为 Schwinger 效应。因为 Schwinger 效应是一个非微扰过程[11]，所以 QED 的微扰论方法在此是不适用的。因此，对 Schwinger 机制的研究还有助于加深对 QED 中其它非微扰现象的理解。

除了通过 Schwinger 量子隧穿产生正负电子对外，还可以通过吸收单个或多个光子来产生正负电子对。前面我们提到，如果负能连续态中的负能电子吸收了一个能量大于正负能带间能隙的高能光子，即  $\hbar\omega > 2mc^2$  ( $\omega$  为光子圆频率)，那么负能电子就可以直接跃迁到正能带上形成电子而在负能带中留下一个空穴—正电子，这就是单光子吸收引起的正负电子对产生过程，见图(1-4)(b)。与原子电离中的多光子电离类似，对于低能光子，真空负能带中的负能电子需要吸收多个光子才能克服正负能带间的能隙跃迁到正能带产生正负电子对，该过程就称为多光子吸收引起的正负电子对产生[21,22]，见图(1-6)。其中  $\xi = m\omega/eE_0$  为 Keldysh 绝热参数。真空产生正负电子对的两种机制可以用 Keldysh 参数清楚地区分开来[23]。

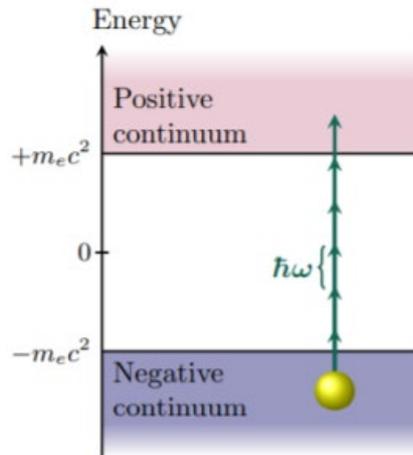


图 1-6 多光子过程[23]。

Fig.1-6 Multiphoton regime ( $\xi \ll 1$ ) [23].

Schwinger 临界场强  $E_s$  对应的激光强度为:

$$I_s = 2.3 \times 10^{29} \text{ W/cm}^2 \quad (1-5)$$

短时间内不可能在实验上达到这样的强度。所以现阶段关于真空中产生正负电子对的相关问题，只能通过理论（包括解析和数值模拟）手段来加以研究。在 Heisenberg, Euler, Schwinger 等人的基础上，近些年已经发展了很多更加简单和实用的半经典近似法和量子动理学方法，半经典近似法有世界线瞬子技术(worldline instanton technique) [24,25]和广义 WKB 近似[26]等，量子动理学方法包括量子 Vlasov 方程(quantum Vlasov equation, QVE) [27]等。量子动理学方法的优点是不仅可以求得真空中产生正负电子对的数密度，还可以给出产生正负电子对的相空间信息，这更加有利于对正负电子对产生过程的进一步理解。R. Grobe 和 Q. Su 等发展了一套较为简单可行的计算量子场论方法(Computational Quantum Field Theory, CQFT) [28]，能够清晰地对在空间和时间上都不均匀分布的外场中产生正负电子对的过程进行研究，并且可以清晰地区分各级电子对产生过程。

### 1.3 数值计算方法简介

量子电动力学被认为是目前描述自然界最为精确的理论之一，广泛应用在物理学

各领域的理论与实验的计算中。由于其计算过程中所需的数学知识较为复杂，平时运用中我们只能以微扰论的形式进行计算。这种做法在相互耦合作用比较弱的情况下能给出十分精确的预测，然而当相互耦合作用比较强时，微扰展开便不再适用，因此需要寻找新的方法来解决复杂的计算问题。但是这时解析求解已经遇到了很大困难，因此数值模拟成为研究强场 QED 过程的主要方法。与传统的计算方法相比，计算量子场论的方法可以对 QED 过程进行实时的跟踪，而不只是考虑长时间条件下的趋势。运用计算量子场论的方法，我们可以对不同外场条件下的真空击穿和正负电子对产生过程进行直接的数值模拟研究和分析。

从上个世纪末开始，R. Grobe和Q. Su等人提出用劈裂算符的方法数值求解含时的Dirac方程[28]，并基于这一方法建立了一维情况下的正负电子对产生的数值模拟框架，即计算量子场论。与传统的散射矩阵方法不同，这套数值模型通过将含时的Dirac方程进行二次量子化，并定义任意时刻的 QFT 观测量，从而得到含时演化的非微扰结果。在接下来的章节中，我们会给出相关的具体细节。

运用 Bogliubov 变换[29]，我们可以将场算符随时间的演化转化成单粒子波函数随时间的演化。因此要得到任意时刻的场算符就要求解含时的单粒子相对论性波动方程，在本文范围内即Dirac方程。我们运用了一个已经相对成熟的，用来研究三维波包在静电场和均匀或不均匀磁场中运动的数值计算方法—劈裂算符方法。

为了将真实情况中连续的问题离散化和有限化，转化成一個可通过数值模拟求解的问题，我们引进了一些相互独立的参数。如三维坐标(x, y, z)的每个方向都被等分成了 $N_x$ ,  $N_y$  和  $N_z$  个离散的点，每两个相邻点之间的距离分别为 $\Delta x$ ,  $\Delta y$  和  $\Delta z$ 。如果我们选择以边长分别为 $L_x$ ,  $L_y$ 和 $L_z$ 的盒子为计算空间，则有 $\Delta x = L_x/N_x$ ,  $\Delta y = L_y/N_y$  和  $\Delta z = L_z/N_z$ 。根据所要研究问题的动力学对称性，各个方向上格点和计算空间的选取可以不尽相同。此处选取笛卡尔直角坐标系的目的是，为了将来在计算中可以根据实际问题的需要，我们可以在不用对程序做较大改动的情况下，非常方便地将计算维数降低为二维或一维。降低维数是数值模拟中经常用到的简化计算，提高效率和精度的方法，而且我们也发现在很多情况下粒子在外场中的运动是被限制在一维或是二维的

空间里，这时通过减少维度就可以大大提高计算精度。整个正负电子对产生物理过程的演化时间被设为从0到T，且被分成了 $N_t$ 等份，两个相邻时间点之间相隔 $\Delta t = T/N_t$ 。通过将波函数在单个时间步长上的演化累加起来，我们可以得到波函数在整个时间T上的演化，最后经过所有的时间步数后我们就得到了从某个初态波函数经过相互作用而产生的系统的末态波函数，然后再对此末态波函数进行分析就可以得到我们想要的数据和结果。

## 1.4 最优控制理论背景简介

数学优化是指从一组可用替代方案中选择最优解（对于某些特定标准而言）。从计算机科学和工程学再到运筹学和经济学，各种优化问题在所有定量学科中都有出现。几个世纪以来，优化求解方法的发展一直是数学界关注的问题[30]。在最简单的情况下，优化问题包括通过从允许的集合内系统地选择输入值并计算函数的值来最大化或最小化实函数。优化理论和技术对其他公式的概括构成了应用数学的一大领域。更一般而言，优化包括在给定定义域（或输入）的情况下找到某些目标函数的“最优可用”值，其中包括各种不同类型的目标函数和不同类型的域。

最优控制理论是数学优化的一个分支，涉及在一段时间内为动态系统找到最优控制函数，从而对目标函数进行优化[31]。最优控制可以看作是控制理论中的一种控制策略。最优控制是变分法的扩展，是用来导出最优控制策略的数学优化方法。本文将运用最优控制理论来解决极强场条件下真空中正负电子对产生率的最优化问题。

## 1.5 论文主要内容

本论文主要由以下几个部分组成：

第一章的绪论首先介绍了激光技术的发展以及强场激光与物质作用的物理学研究。随着超短超强激光技术的发展，激光器的峰值功率开始向10PW量级迈进。与此同时强场物理研究的重点也开始逐渐从研究强激光等离子体相互作用中的相对论效

应转移到强激光和等离子体以及和真空相互作用的 QED 效应。我们重点介绍了极强场下真空中正负电子对产生的两种机制，并简单介绍了理论模型以及数值求解方法。在本章的最后对最优化方法做了简要介绍。

在第二章中，通过数值求解量子场论狄拉克方程，我们研究了空间局域超临界电场导致的真空正负电子对产生过程，通过改变该外场的空间分布，搜索最优场结构，使稳态下的正负电子对产生率最大化。研究发现，对于具有单个最大值和固定总能量的电场脉冲形状，其产生率并非单调依赖于场的空间宽度；基于矩形外场形式，对原有的 Schwinger 产生率公式进行了校正，该公式可以为具有单个峰值的外场下正负电子对产生的阈值行为以及有限脉冲效应提供解析预测。

在第三章中我们通过对耦合到同一含时外力的多个相互独立系统的动力学的研究，利用最优控制理论，我们得到了该外力最优化的脉冲形状，使得这些系统的集体响应同时最大化，如果以振子系统为例，这种集体响应是最终所有振幅的加权总和。特别值得注意的是，对于某些系统，此集体响应的最优力与每个系统单独响应的最优力可以解耦，因此可以先对这些单个外力分别进行优化，然后通过叠加原理，得到集体响应的最优解。运用该方法，我们首先对带阻尼的线性和非线性振子进行了数值和解析研究，然后应用于激光脉冲最优时间波形的预测，该波形可以使一组量子力学两能级原子的最终宏观总偶极矩最大化，该方法可以推广应用到真空中含时外场从负能级向正能级激发电子，产生正负电子对的最优化研究。

第四章中我们对一般含时外场下真空中正负电子对的产生开展了研究，通过最优控制理论，确定了一些时间脉冲形状，使得原来在狄拉克海中具有一定动量分布的虚粒子产生正电子的产额最大化。在脉冲能量足够小或相互作用时间足够短的微扰情形下，我们获得了与给定的终态正电子动量分布对应的最优激发外场的解析形式。对于具有任意空间依赖的超临界电场，我们研究了稳态正负电子对产生率：通过开发基于梯度下降的数值优化算法，在外场能量一定的情况下，获得了使得正电子产率最大化外场的空间形状，并通过利用狄拉克-哈密顿量负能量本征态之间共振的解析模型解释了其中的物理机制；我们还发现在某些情况下，对于给定的外场能量范围，较小的

电场有时反而会使得正负电子对产额更高。

第五章中对应于真空中正负电子对产生的两种渠道，即多光子跃迁和隧穿过程，我们研究了同时具有时间依赖和空间依赖外场的时空共生优化关系。第一种产生机制通常是由外场随时间的变化引起的，第二种产生机制是由具有超临界强度的随空间变化的电场引起的。在一定的参数区间范围内，通过对外场的时间特征参数（即频率）和空间特征参数（即场的宽度和凸起高度）的同时优化，我们发现对于正负电子对产生最优的随时间和空间变化的外场实际上类似于分别针对空间和时间做独立优化后的组合场。

第六章我们对全文做了总结，着重突出了本文的目的、意义以及创新点，然后对未来的工作内容和研究方向进行了展望。

除非特别说明，本文一律采用原子单位制(atomic unit, a.u.): 光速  $c = 137.036 \text{ a.u.}$ ,  $\hbar = m_e = |e| = 1$ ,  $\hbar$  为约化普朗克常数,  $m_e$  和  $e$  分别为电子质量和电子电量。

## 第二章 真空产生正负电子对的空间局域外场的优化

在本章中，我们通过数值求解量子场论 Dirac 方程，研究了在空间局域超临界电场作用下真空中产生正负电子对的过程。通过改变外场的空间分布，我们寻找了最优外场结构以使稳态下的正负电子对产生率最大化。我们发现，对于具有单个最大值和固定总能量的脉冲形状，其产生率并不是单调依赖于场的空间宽度。我们还发现可以对 Schwinger 产生率进行校正，从而可以为阈值行为以及有限脉冲效应提供解析预测。

### 2.1 引言

在超临界外部电场作用下，从真空中产生正负电子对的可能性是狄拉克方程最引人入胜的预测之一。实际上，世界各地有许多实验室已投入大量资源开发新型激光光源，强度可能足以击穿真空态，并验证 Schwinger 等人[9,11,18]预测的正负电子对产生过程。因此，重要的是要更好地了解如何配置外场使得正负电子对产生率最大化。

在上一章我们提到过，强场条件下在真空中产生正负电子对有两种截然不同的机制，一种是含时外场的时间依赖性可以触发单光子或多光子跃迁，从而将初始负能量占据态(狄拉克海)激发至无外力狄拉克哈密顿量的正能量本征态。在这一机制中，相关光子的能量(频率)对正负电子对产生率起着决定性作用。Kohlfirst 等人[32]以及 Hebenstreit 和 F. Gourdeau [33]最近进行的工作研究了通过优化电场的时间脉冲形状来最大化最终正负电子对产生率的各种方法。他们还给出了优化控制理论(optimal control theory)可以提供一种独特方法使得产生率最大化的建议。

另一种击穿真空的机制就是基于不含时的超临界外场。若相关电势  $V_0$  大于电子的静止能量，即  $V_0 > 2mc^2$ ，则 Dirac 方程的上下连续能态可能会发生永久性地简并，从而导致产生的正负电子对的产额随时间线性增长，这可以通过单个产生率来表征。受到含时情况下开拓性工作的启发，我们觉得有必要研究使得正负电子对产生率最大化的最优外场空间分布。这一研究可能会对将来的实验带来帮助。在这种情况下，我

们指出了最近的一项工作[34]（与普遍的看法相反）的结论，即正负电子对并不一定在电场强度最大的那些空间区域中产生。事实上这项工作提供了一些条件简化的具体例子，其中在电场强度最小的那些空间位置，正负电子对产生率最大，而在电场强度取最大值的空间分布区域内，并没有任何正负电子对产生。因此，我们试图探究在外场能量固定的情况下，是否存在可以使得正负电子对产生率最大化的最优外场空间分布。

约束优化的研究领域是计算数学的一个重要分支，关于这一主题已经有很多教科书出版[35,36,37]。在某些变量存在某些约束的情况下，奖励或效用函数通常会被最大化。约束优化问题解决方法通常比较复杂，可以随特定类型的约束（基于等式或基于不等式的硬约束或基于惩罚函数的软约束）而发生巨大变化，并且可能涉及线性，二次或动态编程。对于我们所要研究的问题而言，相应的目标函数（正负电子对产生率）可以是表征外加电场构造参数的高度非线性甚至非微扰函数，而这需要对 Dirac 方程的完整解进行数值模拟，因此我们很难将这些传统的优化方法直接应用于正负电子对的产生过程。

本章的主要内容如下：在第二部分中，我们简要介绍我们的模型系统并描述预测产生率的数值计算框架。在第三部分中，我们考察了具有单个最大峰值的外场构造的不同种类电场，并表明可以用来对 Schwinger 产生率进行校正，从而可以为外场空间分布的最优宽度提供解析预测。在第四部分中，我们检查两波峰的结构是否可以进一步提高正负电子对产生率。在第五部分中，我们基于物理机制对最优脉冲形状进行了一番估计。在本章的最后一部分，我们作了简短的总结以及讨论了一下未来所面临的挑战。

## 2.2 一维空间中的计算量子场论

正负电子对的形成过程可以用狄拉克哈密顿量在一个空间维度上建模[38]：

$$H_D = c \sigma_1 p + \sigma_3 c^2 + V(x) \quad (2-1)$$

其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  是两个 Pauli 矩阵， $V(x)$  为外加电场的电势。在以下的数值模拟中，我们

使用原子单位制，其中三个基本常数（电子电荷量，电子质量和约化普朗克常数  $\hbar$ ）从定义上讲都是归一的。光速为  $c=137.036a.u.$ 。

无外场哈密顿量的能量本征态（用  $H_0$  表示），正能量为  $w_p \equiv [c^4 + c^2 p^2]^{1/2}$ ，正能量连续态中的动量  $p$  由  $H_0|u;p\rangle = w_p|u;p\rangle$  描述；而负能量连续态满足  $H_0|d;p\rangle = -w_p|d;p\rangle$ ；正负能态的双组分状态空间表示由下式给出：

$$\langle x|u;p\rangle \equiv W_p(u;x) = \eta[1, c p/(c^2+w_p)] \exp[ipx] \quad (2-2a)$$

$$\langle x|d;p\rangle \equiv W_p(d;x) = \eta[-c p/(c^2+w_p), 1] \exp[ipx] \quad (2-2b)$$

其中  $\eta \equiv (2\pi)^{-1/2} [1+c^2 p^2/(w_p+c^2)^2]^{-1/2}$  表示归一化因子。

可以从正负电子对的时空演化量子场算子  $\Psi(x,t)$  计算正负电子对总数：

$$N(t) = \sum_p \sum_{p'} \left| \int dx W_p(u;x)^* U(t) W_{p'}(d;x) \right|^2 \quad (2-3)$$

其中  $U(t) = \exp(-iH_D t)$  是时间演化算子。正负电子对产生率可以通过对时间求导得到：

$$\Gamma \equiv dN(t)/dt \quad (2-4)$$

在等式(2-3)中，每个态  $W_{p'}(d;x)$  在全狄拉克-哈密顿方程(2-1)上演化，然后投影到每个态  $W_p(u;x)$  上。使用成熟的基于快速傅里叶变换的劈裂算子方法[28,39,40,41,42]，可以在具有  $N_t$  个时间网格点和  $N_x$  个空间网格点的时空网格上数值求解这些波函数。

此外我们可以通过 Hund 定则[43]来计算正负电子对产生率：

$$\Gamma = \int dE T(E) / 2\pi \quad (2-5)$$

其中  $T(E)$  是能量为  $E$  的电子隧穿透射系数。方程(2-4)和(2-5)提供了两种独立计算产生率的方式，这些为每个模拟中的数值准确性提供了可靠的参考[44]。

## 2.3 单峰电场包络

在本节中，我们比较了具有单个最大峰值的不同类型电场下的正负电子对产生率。我们引入了基于强度定义的空间宽度，这样一来产生率就显著独立于空间分布的特定形状。在 2.3.2 中我们将 Schwinger 产生率的原始表达式校正为适用于空间上不均匀的场，这样我们也可以对最优宽度进行解析预测。

### 2.3.1 直接比较四种外场构型

显然，原则上来说不可能仅用一个参数来表征完整的一系列单峰函数。为了系统性地尝试去研究此类包络，我们根据空间分布在最大值附近的标度行为对空间分布进行分类，从常数( $E_R$ )，线性( $E_T$ )到高斯( $E_G$ )以及平方双曲线正割分布( $E_S$ )，空间分布均依赖于位置  $x$ 。以  $x = 0$  为中心的相应四个空间分布由下列方程给出：

$$E_R(x) = E_{0,R} U(x; -w_R/2, w_R/2) \quad (2-6a)$$

$$E_T(x) = E_{0,T} (1 - |x/w_T|) U(x; -w_T, w_T) \quad (2-6b)$$

$$E_G(x) = E_{0,G} \exp[-(x^2/(2w_G^2))] \quad (2-6c)$$

$$E_S(x) = E_{0,S} \operatorname{Sech}^2(x/w_S) \quad (2-6d)$$

其中  $U(x;a,b)$  表示广义单位步长函数，如果  $a < x < b$  则  $U = 1$ ，否则  $U = 0$ 。我们选择了两个具有二次缩放比例的外场，以检查不同缩放比例对  $x$  的影响，即  $E_G(x) \sim \exp[-x^2]$  vs.  $E_S(x) \sim \exp[-x]$ 。

事实证明，使用四个宽度参数  $w_R$ ， $w_T$ ， $w_G$  和  $w_S$  不利于对四个外场进行系统性地比较。因此，为了更好地描述这些场在空间上的分布，我们引入了基于强度的有效宽度  $\sigma$ ：

$$\sigma^2 \equiv 12 \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = 12 \left\{ \int dx x^2 \rho(x) - \left[ \int dx x \rho(x) \right]^2 \right\} \quad (2-7)$$

归一化的“强度”概率密度根据电场定义为  $\rho(x) \equiv E(x)^2 / \int dx E(x)^2$ 。(2-7)式中系数 12 的选择是为了使得  $\sigma$  与矩形外场  $E_R(x)$  的物理宽度  $w_R$  保持一致。为了保证所有场都具有相同的有效强度宽度  $\sigma$ ，上面引入的参数  $w$  需要根据  $w_R = \sigma$ ， $w_T = (5/6)^{1/2} \sigma$ ， $w_G = 6^{-1/2} \sigma$  以及  $w_S = (\pi^2 - 6)^{-1/2} \sigma$  进行相应地缩放。

相应的振幅  $E_0$  由下式总能量唯一确定，定义为  $\int dx E(x)^2 = H^2$ ，每个电场的总能量都是相同的。这导致对于这四种场，电场振幅均需要按照式  $E_0 = s H / \sigma^{1/2}$  进行缩放，其中无量纲比例因子  $s$  分别为  $s_R^2 = 1$ ， $s_T^2 = 3 (3/10)^{1/2}$ ， $s_G^2 = (6/\pi)^{1/2}$  以及  $s_S^2 = 3 (\pi^2 - 6)^{1/2} / 4$ 。

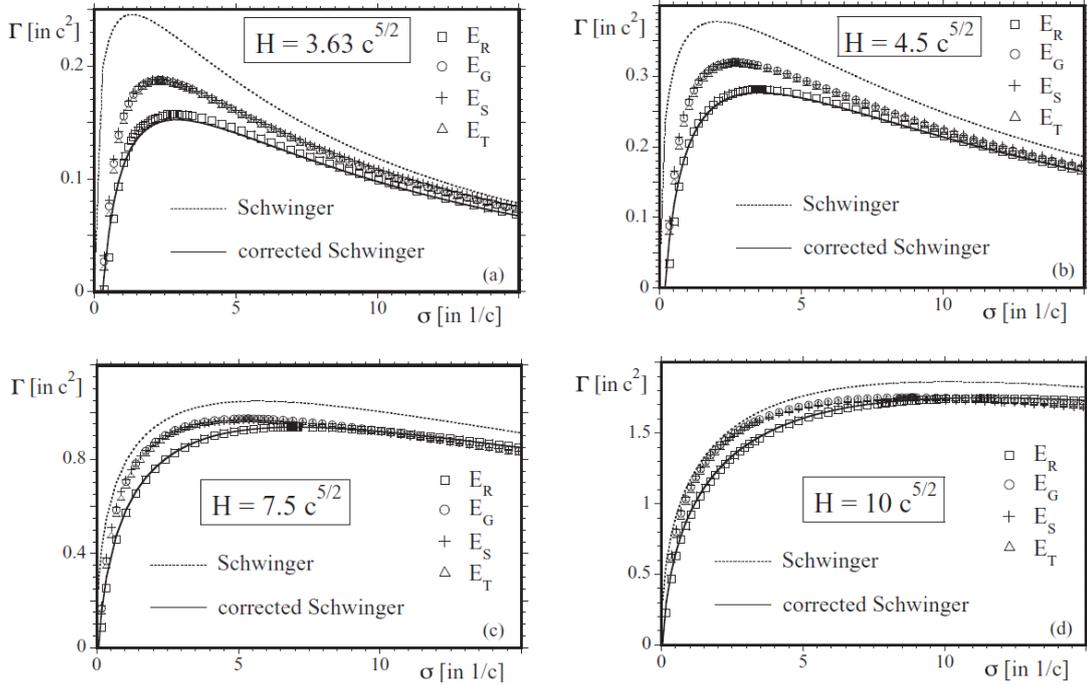


图 2-1 稳态正负电子对产生率 $\Gamma$ 与具有单个峰值空间包络的四个电场结构的有效宽度 $\sigma$ 的关系图。原始的 Schwinger 公式及其更正的形式预测结果也包含在图中。(a)  $H=3.63 c^{5/2}$ , (b)  $H=4.5 c^{5/2}$ , (c)  $H=7.5 c^{5/2}$ , (d)  $H=10 c^{5/2}$ 。

Fig.2-1 The steady state pair-creation rate  $\Gamma$  as a function of the effective width  $\sigma$  of four electric field configurations with a singly-peaked spatial envelope. We also denote the predictions due to the original Schwinger formula and its corrected form. (a)  $H=3.63 c^{5/2}$ , (b)  $H=4.5 c^{5/2}$ , (c)  $H=7.5 c^{5/2}$ , (d)  $H=10 c^{5/2}$ .

在图 2-1 中，我们绘制了前文中定义的正负电子对产生率 $\Gamma$ 以四个能量固定为 $H^2$ 的外加电场有效宽度 $\sigma$ 为函数的关系图。第一个观察结果是，尽管脉冲形状相当不同，但 $\Gamma$ 的变化仍然非常稳健。实际上， $E_S(x)$ 、 $E_T(x)$ 和 $E_G(x)$ 这三个场的产生率甚至很难用图形来区分，而恒定场脉冲 $E_R(x)$ 对于较小的 $H$ 值会导致较小的产生率。第二个观察结果是，在每种情况下，实际上存在一个最优的宽度，使得正负电子对产生率最大。很明显的一点是，对于所有四个脉冲形状，特征宽度 $\sigma_{opt}$ 的大小都非常相似。我们将在下面进一步讨论 $\sigma_{opt}$ 与 $H^2$ 的非平凡缩放。最优宽度与脉冲形状的相对独立性也证实了等式中基于强度的空间宽度(2-7)确实具有一定的物理意义。

我们可以根据值  $\sigma$  的不同, 将产生机制分为三个不同的区间。对于很小的宽度  $0 < \sigma < \sigma_{\text{crit}}$ , 正负电子对产生率  $\Gamma$  可以忽略不计, 即便  $\sigma \rightarrow 0$  时电场振幅  $E_0$  增长到无穷大 (以保证场能量固定为  $H^2$ ), 该产生率  $\Gamma$  也会消失。在该区间中, 产生率的期望  $\Gamma = 0$ , 因为相关电势的振幅  $V_0$  (定义为  $V_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx E(x)$ ) 必须超过众所周知的阈值才能允许永久性的超临界正负电子对产生, 即  $V_0 > 2c^2$ 。例如, 对于  $E_0 = H/\sigma^{1/2}$  的  $E_R(x)$ , 此超临界宽度为  $\sigma_{\text{crit}} = 4c^4/H^2$ 。

第二个区间  $\sigma_{\text{crit}} < \sigma < \sigma_{\text{opt}}$  具有以下特征: 产生率随  $\sigma$  单调增加。该区域标志着超临界正负电子对产生过程的开始, 为此产生率自然必须随  $\sigma$  增加而增加。在第三区域,  $\sigma_{\text{opt}} < \sigma < \infty$ , 比率再次降低。这是两个竞争机制综合的预期结果。如果以  $E_R(x)$  为例, 我们发现电势  $V_0$  的相关高度仅随着  $\sigma$  的增加而微弱增长, 因为  $V_0 = H\sigma^{1/2}$ 。另一方面, 在电势随着  $\sigma$  增大从 0 上升到  $V_0$  的过程中, 区域的空间也在扩展。空间的扩展与更大的隧穿距离直接相关, 这通常会降低入射电子的隧穿透射系数[参见(2-5)式], 这种机制减少了正负电子对的产生[35], 显然这一机制在较大的  $\sigma$  上主导了其它效应。另外, 为了保持外场能量固定, 电场振幅  $E_{0,R} = H \sigma^{-1/2}$  会随着脉冲变宽而减小, 这也会使得产生率  $\Gamma$  下降。

### 2.3.2 有限的静态空间分布外场下 Schwinger 产生率的校正

$E_R(x)$  的脉冲的空间轮廓表征电场在空间区域均匀分布。对于在空间无限扩展的电场的极限情况, Schwinger 产生率公式[11]应该是有效的。在一维空间中, 它预测了每单位长度的产生率由  $(E_0/2\pi) \exp[-\pi c^3/E_0]$  给出。该表达式在  $E_0$  中是高度非微扰的, 可以使用发散微扰展开的 Borel 求和技术来推导[45]。要获得一个近似解析性的估计, 我们可以将  $\Gamma_{\text{Schwinger}} \equiv \sigma (E_0/2\pi) \exp[-\pi c^3/E_0]$  解释为 Schwinger 公式扩展至对矩形脉冲的预测, 该产生率随宽度  $\sigma$  线性增加。据我们所知, 除少数例外, 对 Schwinger 公式在有限范围内的有效性缺乏系统的研究。由于我们将 Schwinger 公式用于以下几个近似比例估算, 因此我们需要首先确定其在有限脉冲范围内的有效性。

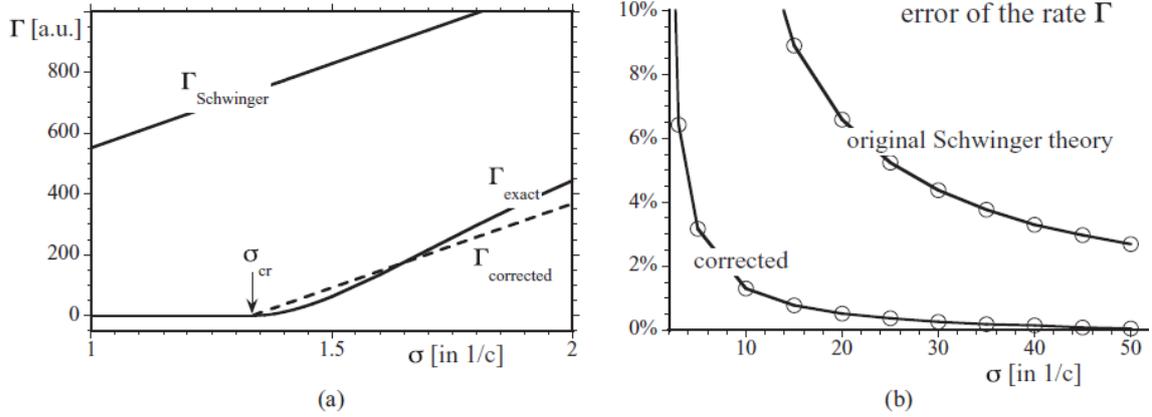


图 2-2 (a)基于 Schwinger 公式的预测, 比较稳态正负电子对产生率 $\Gamma_{\text{Schwinger}}$ 作为电场宽度 $\sigma$ 的函数以及 $E_0 = 1.5c^3$ 的真实产生率 $\Gamma_{\text{exact}}$ 。(b) 原始 Schwinger 产生率的百分比误差以及与校正后的 Schwinger 表达式相关的误差。

Fig.2-2 (a) Comparison of the prediction of the Schwinger formula for the steady state pair-creation rate  $\Gamma_{\text{Schwinger}}$  as a function of the width  $\sigma$  of electric field and the exact rate  $\Gamma_{\text{exact}}$  for  $E_0 = 1.5c^3$ . (b) The percentage error of the original Schwinger rate together with the error associated with the corrected Schwinger expression.

在图 2-2 中, 对于固定电场  $E_0 = E_{0,R} = 1.5c^2$ , 我们将 Schwinger 产生率 $\Gamma_{\text{Schwinger}}$ 与从矩形脉冲  $E_R(x)$ 获得的精确 $\Gamma_R$ 进行比较。不出所料, 我们发现对于非常大的宽度  $\sigma$  来说, 这两种产生率变得相似, 而 Schwinger 产生率 $\Gamma_{\text{Schwinger}}$ 始终大于精确 $\Gamma_R$ 。这意味着原始的 Schwinger 理论高估了任何宽度下的真实产生率。例如, 如图 2-2(b)所示, 对于  $\sigma = 5/c$ , 其相对误差为 32%, 对于  $\sigma = 50/c$ , 其相对误差减小至 2.7%以内。但是, 对于较小的宽度  $\sigma$ , Schwinger 产生率明显高估了。实际上, 当且仅当相关电势变为超临界时, 即  $E_{0,R} \sigma > 2c^2$ , 真实产生率 $\Gamma_R$ 才为非零。从这里可得出宽度在临界宽度 $\sigma_{\text{cr}} \equiv 2c^2/E_{0,R}$ 以下时, 正负电子对产生率为零。相比之下, 在该特定宽度下的 Schwinger 产生率 (基于无限宽度) 预测值为 $\Gamma_{\text{Schwinger}} = c^2/\pi \exp[-\pi c^3/E_0]$ , 而不是正确的零值。 $\Gamma_{\text{Schwinger}}$ 的这种非零值与 $\Gamma_R(\sigma)$ 和 $\Gamma_{\text{Schwinger}}(\sigma)$ 之间的近似常数偏移的关系如图 2-2(a)所示。为了针对这种有限宽度效应校正 Schwinger 表达式, 我们可以简单地减去该偏移量, 然后引入一个新的产生率, 定义为:

$$\Gamma_{\text{cor}} \equiv [\sigma E_0/2 - c^2]/\pi \exp[-\pi c^3/E_0] \quad (2-8)$$

仅当场为超临界时，该新产生率 $\Gamma_{\text{cor}}$ 才为正，并且可以自然地校正图 2-2(a)中所示的偏移量。我们已经在图 2-1 中包含了原始的 Schwinger 预测值以及校正值。我们发现校正后的产生率 $\Gamma_{\text{cor}}$ 在整个宽度范围内与矩形脉冲  $E_R(x)$ 的真实率匹配，并且对所有脉冲能量都符合得非常好。

为了更定量地说明，我们在图 2-2(b)中显示，校正后的 Schwinger 产生率可以近似真实产生率，并且相对误差（定义为 $|\Gamma - \Gamma_{\text{exact}}|/\Gamma_{\text{exact}}$ ）要比原始表达式中的相对误差小得多。具体来说，校正后的 Schwinger 产生率公式将上述相对误差从 32%降低到仅 3.1%（对于小宽度  $\sigma = 5/c$ ）以及从 2.7%到 0.5%（大宽度  $\sigma = 50/c$ ）。确定了校正后的 Schwinger 产生率的精确度后，即使对于空间分布范围较小的电场，现在，我们可以使用解析表达式来分析产生率的标度行为以及各类具有固定能量脉冲的最优宽度。如果再次使用  $E_0 = H/\sigma^{1/2}$ ，则产生率的解析表达式变为：

$$\Gamma_{\text{cor}}(\sigma, H) \equiv [H \sigma^{1/2}/2 - c^2]/\pi \exp[-\pi c^3 \sigma^{1/2}/H] \quad (2-9)$$

因此，我们可以使用这种近似却可靠的解析表达式以检验最优宽度的标度  $\sigma_{\text{opt}}$ 。根据条件  $d\Gamma_{\text{cor}}(\sigma, H)/d\sigma=0$ ，我们可得：

$$\sigma_{\text{opt}} = (H^2 + 2c^5\pi)^2/(c^6H^2\pi^2) \quad (2-10)$$

这意味着基于 Schwinger（校正后的）的近似值表明可能不存在与能量无关的通用最优电场形状。最优宽度确实取决于脉冲能量的事实说明了正负电子对产生过程的真正非线性性质。事实上，对于较大的脉冲能量( $H^2 > 2c^5\pi$ )，最优脉冲宽度随能量增加而增加， $\sigma_{\text{opt}} = H^2/(c^6\pi^2)$ ，而对于较小的脉冲能量( $H^2 < 2c^5\pi$ )，最优脉冲宽度 $\sigma_{\text{opt}} = 4/(cH^2)$ 随能量增加而减小。另外一点值得注意的是，对于任何固定的能量  $H^2$ ，相应的最优脉冲都是超临界的。这一点可以从  $V_{\text{opt}} = E_0 \sigma_{\text{opt}} = H \sigma_{\text{opt}}^{1/2} = H [(H^2 + 2c^5\pi)^2/(c^6H^2\pi^2)]^{1/2}$  中看出这一点，因为当  $H = 0$  时， $V_{\text{opt}} = 2c^2$ 。

如果将最优宽度代入产生率公式中，我们会发现最大产生率本身随能量  $H^2$  单调增长：

$$\Gamma_{\text{opt}}(H) \equiv \Gamma_{\text{cor}}(\sigma_{\text{opt}}, H) = [H^2/(2\pi^2c^3) \exp[-1 - 2\pi c^5/H^2]] \quad (2-11)$$

由此可见，对于一个确定的空间而言，和 $\Gamma(H)$ 随 $H$ 的通常的（非微扰）增长( $\Gamma(H) \sim H \exp[-\beta/H]$ )相比，最大正负电子对产生率 $\Gamma_{\text{opt}}(H) \sim H^2$ 随着 $H$ 的增长而增长的更加迅速。

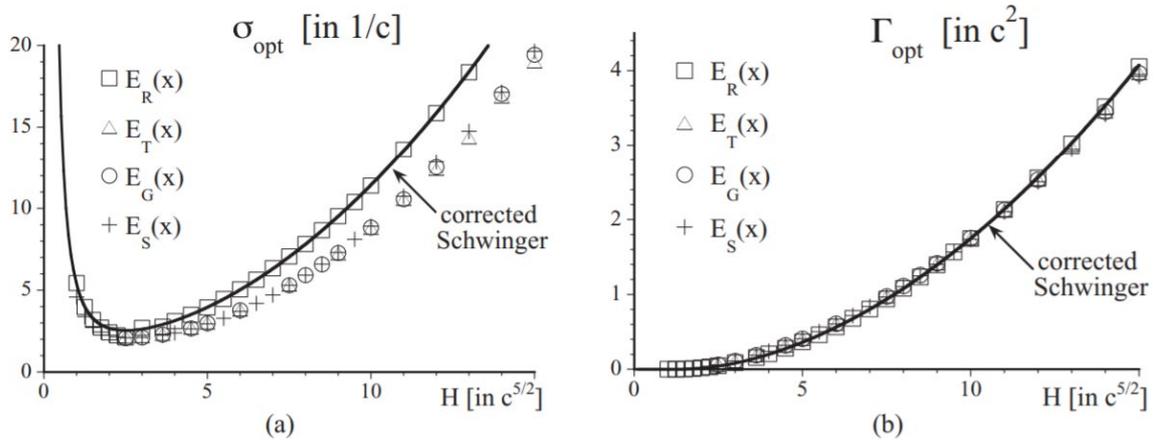


图 2-3 以外加电场脉冲的总能量 $H$ 为函数的最优有效宽度 $\sigma_{\text{opt}}$ (a)和最大正负电子对产生率 $\Gamma_{\text{opt}}$ (b)。

Fig.2-3 The optimal effective width  $\sigma_{\text{opt}}$  (a) and the maximal pair-creation rate  $\Gamma_{\text{opt}}$  (b) as a function of the total energy  $H$  of the external electric field pulse.

为了检查此预测是否还适用于其他类型的外场，我们在图2-3中通过方程2-6引入的不同类型外场，分别在(a)和(b)中对 $\sigma_{\text{opt}}$ 和 $\Gamma_{\text{opt}}$ 的Schwinger预测进行了对比。要获取这四个场的数据，在计算上相当费时，因为它需要计算产生率的整个宽度依赖性，然后为每个图形找到其最优宽度，然后对每个能量重复这些计算。

尽管原始的Schwinger产生率仅在空间上无限扩展的电场（实际情况下并不存在）这一限制条件下严格有效，基于校正后的Schwinger公式对最优空间宽度的定量预测非常准确，并且与数据（尤其是 $E_R(x)$ ）非常匹配。与其他三个场结构一致的数据表明，为了在单峰电场结构下最大化正负电子对产生率，空间范围应该总是超过约 $\sigma = 2.5/c$ 的最小宽度。此外，如果实验上可达到的能量 $H^2$ 不是很大，那么一个在空间上扩展范围更大的场将会比较理想。实际上，可用的场能量越小，就越应该增大空间扩展范围，以增加正负电子对产生率。最大可达到产生率的大小[如图2-3(b)所示]随 $H^2$ 增长而单调增长。所有数据的匹配表明，简单的解析表达式2-11甚至适用于任意单峰电场的情况。

## 2.4 双峰电场包络

在上一节中，我们看到对于单峰电场包络，有两种相互竞争的机制来确定最终产生率。检查具有两个峰值的更一般的电场形状类别为我们提供了额外的自由度来控制正负电子对产生率。此外，这引出了影响正负电子对产生率的另一种机制。该机制与以下观察结果有关：产生率似乎随着两个峰的空间间隔的增加而普遍降低。正如我们将在下面讨论的那样，所有三种竞争机制的同时存在会导致涉及产生率的局部和全局最大值相关结构的出现，其中产生率是这些场的有效宽度  $\sigma$  的函数。此外，这种自由度还可以使我们研究以下问题：与单峰形状相比，这种特定类型的脉冲形状是否可以进一步提高产生率。

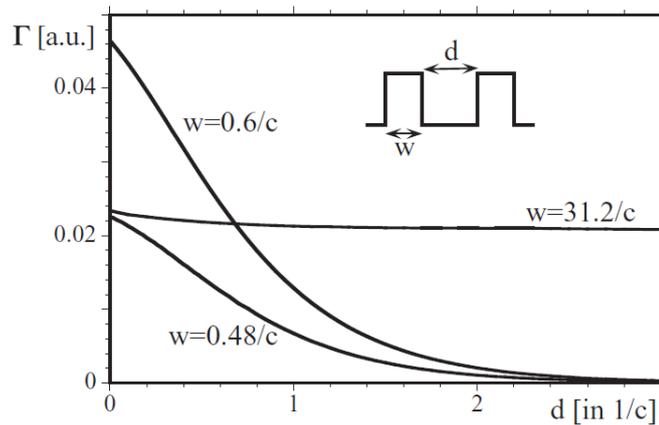


图 2-4 稳态正负电子对产生率为两个矩形电场的间隔  $d$  的函数，每个电场的宽度均为  $w$ 。在插图中，我们绘制了此电场的空间轮廓。该图对应于宽度  $0.48/c$ ， $0.6/c$  和  $18\sqrt{3}/c$ ，以及总能量  $H = 3.63c^{5/2}$ 。

Fig.2-4 The steady state pair-creation rate  $\Gamma$  as a function of the separation  $d$  of the two electric fields with the width  $w$  each. In the inset we sketch this spatial profile. The graphs correspond to the widths  $0.48/c$ ,  $0.6/c$  and  $18\sqrt{3}/c$  and total energy  $H=3.63 c^{5/2}$ .

在图 2-4 中，我们绘制了产生率为两个宽度均为  $w$  的矩形场之间间距  $d$  的函数，插图描绘了对应的电场  $E_{TP}(x) = E_R(x) + E_R(x - w - d)$  分布。图中显示的产生率随  $d$  的关系表明，即使整体扩展增加了有效宽度  $\sigma$ ，正负电子对产生率还是减小了。但是，每个单脉冲的宽度  $w$  仍决定产生率的整体大小，如  $0.48/c$ ， $0.6/c$  和  $31.2/c$  的三个曲

线的比较所示。实际上，如果我们选择最优宽度  $\sigma_{\text{opt}}$ （如先前部分中对单个峰值电场的预测），则两峰电场作用下的产生率也是最大的。图 2-4 中的数据是在与图 2-1(a) 相同的能量下获得的，其中对应于宽度  $0.6/c$  的产生率也始终大于对应于较小宽度  $0.48/c$  和较大宽度  $31.2/c$  的产生率。

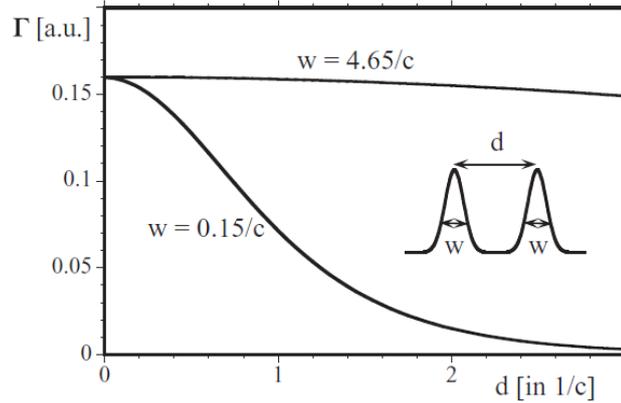


图 2-5 稳态正负电子对产生率对两个高斯电场的间隔  $d$  的依赖关系，每个电场的宽度均为  $w$ 。插图绘制了场的空间轮廓。该图对应于宽度  $0.15/c$  和  $4.65/c$ ，总能量  $H = 4.5c^{5/2}$ 。Fig.2-5 The steady state pair-creation rate  $\Gamma$  as a function of the separation  $d$  of the two electric field with a Gaussian spatial envelope and width  $w$  each. In the inset we sketch this spatial profile. The graphs correspond to width  $0.15/c$ ,  $4.65/c$  and  $H = 4.5 c^{5/2}$ .

有理由认为产生率  $\Gamma$  随着  $d$  的这种单调下降对于一般情形来说是不正确的，这一现象应当仅在我们特定的矩形场  $E_{\text{TP}}(x)$  情形下发生。更一般的情况下，对于任何  $d \neq 0$  的两个电场分布，峰之间的间隙范围都会随着宽度  $w$  的增加而消失，这会使得以上得到的结论不正确。为了推广这一发现，我们对两个高斯场重复了相同的模拟。

如图 2-5 所示，产生率与  $d$  的单调关系似乎确实很普遍，这表明选择具有两个峰值的电场的额外自由度不一定会导致正负电子对产生率的提高。因此，最优化的电场结构很可能就是单峰电场。

最后，我们将演示三种不同竞争机制的同时作用，分别是：(1) 对于较小的  $\sigma$ ， $\Gamma$  随着的  $\sigma$  增加而增加；(2) 对于较大的  $\sigma$ ， $\Gamma$  随着的  $\sigma$  的增加而减小；最后(3)  $\Gamma$  随  $d$  的增加而一般性地降低，这几种不同机制的同时作用会导致产生率出现一系列子结构。为了说明这一点，我们选择了两峰结构：

$$E_{\text{TP}}(x) = E_{0,R} U(x; -s/2, s/2) + E_{0,R} U(x-2s; -s/2, s/2) \quad (2-12)$$

其中两场之间的间距  $s$  选择为和每个峰的宽度相等, 如图 2-6 所示.

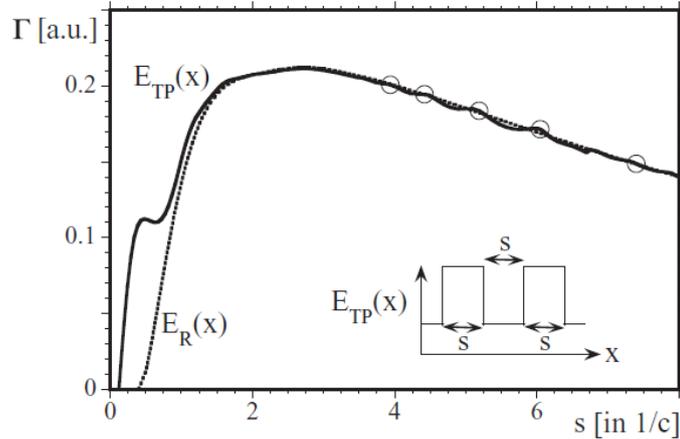


图 2-6 稳态正负电子对产生率对两个场之间的间隔  $s$  (以及每个脉冲的扩展  $s$ ) 的依赖关系。相应的结构示于插图。为了进行比较, 虚线曲线是仅与第一个脉冲的产生率的两倍。空心圆是对于  $n=4, 5, 6, 7$  和  $8$ , 根据  $s_n = 33.3c^{-1}(n+1/2)^{-1}$  计算出的最大值的位置。 [ $H = 4.5c^{5/2}$ ].

Fig.2-6 The steady state pair-creation rate  $\Gamma$  as a function of the separation  $s$  (as well as the extension  $s$  of each pulse) between the two fields. The corresponding configuration is shown in the inset. For comparison, the dashed curve is twice the rate associated with only the first pulse. The open circles are the locations of the maxima according to  $s_n = 33.3c^{-1}(n+1/2)^{-1}$  for  $n = 4, 5, 6, 7$  and  $8$ . [ $H = 4.5c^{5/2}$ ].

每种机制的强度取决于  $s$ , 存在四个不同的依赖区间: 与图 2-1 一致, 存在零产生率机制区间; 其后是  $s$  较小时的增长区间; 比较特别的是第三个区间 ( $s=0.4$  附近),  $\Gamma$  在局部最大值之后先降低, 后继续增加。  $s$  在  $\Gamma$  的局部最大值和最小值之间的这个域是由于上面图 2-4 中所示的机制引起的, 其中脉冲间隙  $d$  的增加总是导致  $\Gamma$  的减小。在该区域中, 导致  $\Gamma$  减小的机制(3)相较于导致  $\Gamma$  增大的机制(1)占据更为主导地位。

图 2-6 中我们对双脉冲与单脉冲产率进行了比较, 图中用虚线表示了单个脉冲获得的产生率  $\Gamma$  的两倍值。从图中可以看出当两个脉冲间隔较大时, 则该产生率  $2\Gamma$  与双脉冲的产生率相一致, 这就表明在这种情形下, 一个脉冲中正负电子对的产生将不会干扰另一相邻脉冲中正负电子对的产生。但是, 对于较小的间隔  $s$ , 我们观察到两脉冲结构的产生率超过了单脉冲产生率的 2 倍。这种差异是因为单个脉冲的能量仅具有

两个组合脉冲能量 $[H^2 = (4.5 c^{5/2})^2/2]$ 的一半，单脉冲产生最优的正负电子对需要更大的场宽度  $s$ ，而双脉冲情形下由于等效宽度的原因，在  $s$  较小时就会达到最优的宽度。

我们还注意到图中当  $s > 4/c$  时存在一些振荡结构[46]。这是由于产生粒子的几个长度尺度（例如间距  $s$  和 de Broglie 波长）之间的相互作用可能会影响总产生率，因此这些振荡可能是某些破坏性和建设性量子干涉的结果。虽然我们无法导出可以预测最大值和最小值位置的唯象学模型，但我们发现数值表达式  $s_n(n + 1/2) = 33.3/c$  可以非常好地描述最大值的实际位置。在图中，我们用空心圆表示了  $n = 4, 5, 6, 7$  和  $8$  时这些预测的位置。

## 2.5 基于物理机制的最优脉冲形状估计

以上所有的优化研究都仅限于电场包络为特定的种类，且只针对单个参数（例如宽度或峰峰间距）进行优化。在本节中，我们将使用两种物理机制来预测更一般的最优脉冲形状，通过测试 Schwinger 产生率表达式，表明最优场为  $E_R(x)$  的形式。我们的研究还表明，同样的最优脉冲形状也可以通过经典力学机制得到预测，其原理是将正负电子对产生区域中粒子的加速时间最小化。

### 2.5.1 Schwinger 机制

尽管 Schwinger 的特殊情况仅对在空间上无限扩展的外场严格有效，但我们在上面已经提出，它可以为我们提供有关最优宽度标度的定性预测。因此，很容易检查我们是否可以应用常规的变分微积分方法，以基于 Schwinger 产生率的公式找到最优外场形状。我们可以假设产生率公式中的电场实际上是空间相关的，并尝试构建脉冲形状  $E(x)$ ，以在  $H^2 \equiv \int_{-w/2}^{w/2} dx E(x)^2$  的约束下优化  $\Gamma \equiv \int_{-w/2}^{w/2} dx E(x) / (2\pi) \exp[-\pi c^3 / E(x)]$ 。

结果表明，对于任意函数  $f$ ，凡是具有通用形式  $\Gamma[E(x)] \equiv \int_{-w/2}^{w/2} dx f[E(x)]$  的泛函，总是通过常数场  $E(x) = \text{const}$  进行优化。由于不存在任何导数项（例如  $dE/dx$ ），因此

相应的 Euler-Lagrange 方程只是  $E(x)$  的代数方程, 例如  $\partial f / \partial E - \lambda 2E(x) = 0$ , 其中  $\lambda$  是拉格朗日乘数。因此, 这种方法不会预测任何非平凡的包络线  $E(x)$ , 并且最优场由等式(2-6a)中定义的  $E_R(x)$  给出。这与非常大的场能量  $H^2$  (比较图 2-1d) 的情况是一致的, 我们还观察到, 对于较大的  $\sigma$ , 恒定场脉冲  $E_R$  导致比其他三个非均匀场  $E_G$ ,  $E_S$  和  $E_T$  更大的正负电子对产生率。

从积分  $\Gamma = \Delta x \sum f[E(x_n)]$  的有限黎曼和表示的和项的可交换性也得出相同的结论。如果我们在任意位置  $x_N$  和  $x_M$  交换函数的值, 即  $E'(x_N) = E(x_M)$  和  $E'(x_M) = E(x_N)$ , 则总和不变。对于  $\int_{-w/2}^{w/2} dx f[E'(x)] = \int_{-w/2}^{w/2} dx f[E(x)]$ , 可得新函数  $E'(x_n) \equiv E(x_n) (1 - \delta_{nN}) (1 - \delta_{nM}) + E(x_M) \delta_{nN} + E(x_N) \delta_{nM}$ 。如果我们假设将积分  $\int_{-w/2}^{w/2} dx f[E_{opt}(x)]$  极小化的函数  $E_{opt}(x)$  是唯一的, 那么这种“交换对称”将使我们能够构造出无限个等效函数集, 所有这些都导致完全相同的极值积分, 这与  $E_{opt}(x)$  的假定唯一性直接矛盾。因此, 优化函数在任何交换操作下都必须是不变的, 仅对均匀外场  $E_{opt}(x) = \text{const}$  是正确的。

### 2.5.2 经典力学中利用粒子占有时间的判定方法

在这些研究中, 由于泡利不相容原理, 无法离开产生区域的那些正负电子对抑制了整个正负电子对产生过程[47,48,49,50,51,52,53]。其它研究[54]提出, 可以从经典力学的角度理解量子场论正负电子对产生过程的某些方面, 例如能谱。因此, 我们在这里检查所产生的电子加速离开产生区域所需的时间是否与产生率有关。换句话说, 我们在这里假设那些使粒子对产生区域中产生粒子的平均占有时间最小的电场脉冲也就是使产生率最大化的脉冲。

我们假设电场脉冲局域  $x = 0$  和  $x = 1$  由未知电势  $V(x)$  建模。为简单起见, 我们假设在位置  $x = 0$  处产生粒子, 粒子的总能量为  $V(0) = V_0$ 。换句话说, 假定粒子以零速度开始并且向下加速到电势的底部  $x = 1$  处, 其中  $V(x = 1) = 0$ 。粒子从  $x = 0$  到  $x = 1$  传播所需的总时间为

$$T = \int_0^1 dx / [2(V_0 - V(x))]^{1/2} \quad (2-13)$$

其中电势  $V(x)$  受到与上述用于固定脉冲能量的约束相同的约束:

$$H^2 = \int_0^1 dx \left[ dV(x)/dx \right] \quad (2-14)$$

需要指出的是,这和著名的最速下降问题是不一样的。这里的力恒定且严格指向下方,但粒子向另一个方向加速。如果我们使用拉格朗日乘数 $\lambda$ 并应用一阶变分导数,将获得

$$\delta \left\{ \int_0^1 dx \left[ 2(V_0 - V(x)) \right]^{1/2} - \lambda \int_0^1 dx \left[ dV(x)/dx \right]^2 \right\} = 0 \quad (2-15)$$

我们得出了最优电势对应的欧拉-拉格朗日方程:

$$\partial/\partial V \left\{ 1/[2(V_0 - V(x))]^{1/2} \right\} + 2\lambda d^2/dx^2 V(x) = 0 \quad (2-16)$$

当这个方程在数值上与方程(2-14)的约束一起求解时,我们发现,使该区间内的行进时间最小的电势非常接近地由  $V(x) \approx V_0(1-x)$  近似得出,对应于恒定的电场脉冲。请注意,该结论与上一节中讨论的最优外场是一致的。Schwinger 产生率的最大化似乎等效于在恒定电场中经典粒子通过所需时间的最小化。可以预料,在接近起始点  $x=0$  处最大的那些电场(因此可以在早期加速粒子)会使通过时间最小化。然而,为了使从  $x=0$  到  $x=1$  的总通过时间最小化,粒子加速的时间(以及距离)也必须尽可能长,这一点似乎也很重要。显然,对于这两个相互竞争的要求,在空间上保持恒定的外场是最好的折衷方案。

## 2.6 总结与展望

在这项工作中,我们已经表明,对于具有单个峰的超临界电场分布,正负电子对产生率对特定的空间分布依赖性较低。对于具有固定电场能量的脉冲,正负电子对产生率不会随电场脉冲宽度而呈现单调函数变化。实际上,对于每个能量,都有一个最优的空间宽度,对应的正负电子对的产生率最大。对于较小的能量,该最优宽度首先减小,然后随着场能量的增加而增加。我们还校正了原始 Schwinger 产生率公式,以使得该公式适用于有限脉冲情形。校正后的产生率可为最优宽度以及可获得的最大正负电子对产生量提供解析预测。这些预测对于具有单个最大值的各种电场配置都非常

有效。模拟研究表明具有两个空间最大峰值的电场分布并不会提高正负电子对的产额。实际上，我们的研究表明，具有均匀空间分布的简单电场脉冲实际上已经非常接近最优配置，这一意外发现也与基于具有适当约束下的变分原理结果一致。

以上工作是基于不随时间变化外场极限下正负电子对产生率的优化。但是，目前和正在建造中的激光装置都难以简单应用于这些正负电子对产生机制，场的含时效应必须考虑。同时，在我们的研究中忽略了强光场下的粒子的辐射阻尼等效应。尽管最近有一些模型试着包括这些效应[53,55]，但要在三维模拟中，且在场论和非唯象学层面上将这些效应纳入其中还极具挑战性。还有一些其它计算和解析方法尝试对这些问题提供解决方案，例如 Dirac–Heisenberg–Wigner 形式化[56,57]，世界线瞬子[58,59]或实时晶格规范理论[60]，但相关的研究还有待进一步完善。

此外，值得指出的是，在这部分工作中，我们还主要是针对空间对称的场的优化，对于非对称电场分布，我们只做了初步的研究，发现尽管它们在场优化时增加了一个新的自由度，但它们产生的正负电子对通常少于相应的对称分布场。此外，除了场的空间分布需要优化外，即使正负电子对产生过程在很短的时间内发生，外场的时间分布还是会对正负电子对产生过程发生影响，因此有必要将时间变化效应也包括在内，并同时对场的时空分布进行优化，我们将在后续的章节中进行讨论。

## 第三章 同时优化集体响应的叠加原理

在本章中,通过对耦合到同一含时外力的多个相互独立系统的动力学的研究,利用最优控制理论,我们得到了该外力最优化的脉冲形状,使得这些系统的集体响应同时最大化,如果以振子系统为例,这种集体响应是最终所有振幅的加权总和。特别值得注意的是,对于某些系统,此集体响应的最优力与每个系统单独响应的最优力可以解耦,因此可以先对这些单个力分别进行优化,然后通过叠加原理,得到集体响应的最优解。运用该方法,我们首先对带阻尼的线性和非线性振子进行了数值和解析研究,然后应用于激光脉冲最优时间波形的预测,该波形可以使一组量子力学两能级原子的最终宏观总偶极矩最大化,该方法可以推广应用到真空中含时外场从负能级向正能级激发电子,产生正负电子对的最优化研究。

### 3.1 引言

在科学、技术和工程中有许多需要对特定的动态变量进行优化的例子[61,62],例如在相干量子控制领域[63],人们研究的目标之一就是优化外加激光脉冲形状,以破坏分子中的某些特定化学键或控制复杂化学反应的终态产物[64,65]。一般来说人们期望的方案是将激光调谐到与某些分子共振的频率。但是这样一来,由于基于振动弛豫的内部能量转换,经常会加热整个分子,就无法对分子的特定化学键进行控制。为此,除了频率调谐外,最近的实验利用自适应激光脉冲整形技术,还可以独立调整激光器的极化形状[66]、幅度以及相位,为优化提供了更多的自由度。

在众多的最优化方法中,有一种有效的方法叫做最优控制理论(optimal control theory),在合适的约束条件下,可以对某一目标函数进行优化。在某些情况下,对有限数量的变量优化通常可以通过简单地类共轭梯度搜索等方式完成。然而,对于无限维问题,计算上更为困难,需要计算整个时间的函数,这等效于带有约束的无限维优化。

尽管在许多情况下可以通过计算得出最优信号,但要通过直觉获得最优信号是非常困难的。本章的目的之一是获得有关最优信号的定性指导或直觉判定方法,而不是针对某一特定系统给出新的计算方法。在本文中我们需要优化几个(甚至可能无限多个)独立系统的集体响应,这里的关键问题是,是否可以从每个系统的最优控制特性中获取一些相关的信息,可以用来对集体响应的最优化信息进行预测。

我们将表明对于线性系统可以通过以下方法给出所有系统的集体响应最大化的最优力场,该方法为:对各个最优脉冲形状的适当叠加,其中权重因子取决于各个场的时间导数。虽然集体响应的同时优化叠加原理对于非线性系统并不是完全有效,但它对预测一组子系统的集体响应的最优化控制场可以提供准确的指导。

对于单个光场驱动的多能级系统,已有同时优化几个自由度的相关研究,例如,在特殊情况下,各个能级之间是明显分开的,可以通过顺序寻址成对的能级来控制系统[67]。通过定制一系列脉冲来实现最优脉冲,每个脉冲仅处理一对两能级系统。然而,以上基于频率辨别的控制并非总是可行的,例如,它不适合于能量接近或简并的系统[68],我们在本章中通过叠加原理对一组能量接近的两能级系统进行了优化。

本章的主要内容如下:在第二部分中,我们针对耦合到相同的外力上的无限组动力学系统基于最优控制理论,通过引入用于同时优化集体响应的叠加原理,得出了解决它们集体响应最优化的通用理论框架。在第三部分中,我们用阻尼谐波振子组的解析解来说明这一原理的具体应用。在第四部分中我们证明它可以被用来作为预测非线性振子组的最优化外力的定性指导。在第五部分我们研究了使得一组两能级系统的宏观极化最大化所需的最优激光场。在第六部分中我们做了总结,并对未来研究的关键问题做了分析和预测。

## 3.2 N 个动力学系统集体响应的最优化控制理论

### 3.2.1 通用框架及其数值求解技术

在这项工作中,我们研究了  $N$  个动力系统的集体响应,所有这些动力系统都耦

合到相同的外力场，用  $U(t)$  表示。我们的最终目标是得到最优控制外场  $U_{opt}(t)$  的属性，该属性可以在最终时间  $T$  时最大化所有系统的特定集体响应。在下面检查的具体示例中，这种集体响应将是谐振子以及非谐振子的所有最终振幅之和，或者是两能级原子集合的宏观偶极响应。我们将说明，对于某些系统，有可能根据与每个单个系统相关的最优控制场的知识来准确地构造此集体响应，对于第  $n$  个系统，其最优控制场用  $U_{opt,n}(t)$  表示。我们将其称为“同时优化的叠加原理” (superposition principle for the simultaneous optimization, SPSO)。对于那些违反了该原理的系统（例如非线性振子），我们仍然可以利用叠加原理得到与真实最优场  $U_{opt,n}(t)$  相近似的结果。

为了避免得到无实际物理意义（如能量无限大）的最优力场，我们对外力场的总“能量”进行限制， $E = \int_0^T dt U(t)^2$ 。我们用状态向量  $Y_n(t)$  表示每个系统的动力学变量，并要求这些“振幅”满足具有固定初始条件  $Y_n(t)$  的状态方程  $dY_n/dt = K_n[Y_n(t), U(t)](Y_n(t=0))$ 。作为一个我们希望在相互作用时间  $T$  之后最大化的集体变量，我们可以选择组合  $\sum_n \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T)$ ，其中给定的参数  $w_{i,n}$  将表征我们想要相对的相关性分配给第  $n$  个系统的特定状态变量。在附录 A 中，我们回顾了最优控制理论的变分原理在这套系统上的应用，并得出了最优控制场  $U_{opt}(t)$  必须满足的以下方程组：

$$dY_n/dt = K_n[Y_n(t), U(t)], \quad Y_n(0) = Y_n(t=0) \quad (3-1)$$

$$d\lambda_n/dt = -\lambda_n \partial K_n / \partial Y_n, \quad \lambda_n(T) = w_n \quad (3-2)$$

$$U(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n \lambda_n(t) \partial K_n(Y_n, U) / \partial U \quad (3-3)$$

第一个方程式再现振幅的状态方程式，第二个方程式用于拉格朗日函数，由于已知其最终值  $\lambda_n(T) = w_n$ ，因此需要在时间上逆求解。由于拉格朗日函数  $\lambda_n(t)$  的泛函形式取决于集合  $U(t)$ ，因此最后一个方程通常是最优化场必须满足的复杂先验方程。需要选择单个拉格朗日参数  $\lambda_0$ ，以使最优控制场满足  $E = \int_0^T dt U(t)^2$ 。虽然，式(3-1)和(3-2)最初似乎是分离的，但式(3-3)中的最优函数  $U_{opt}(t)$  却是这样取决于每个系统的解，有效地将所有这些方程式耦合到不同的系统。如果只有一个系统耦合到外场，因此仅需要

优化 $\sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T)$ , 则优化器必须满足  $U_{opt,n}(t) = (2\lambda_{0,n})^{-1} \lambda_n(t) \partial \mathbf{K}_n(\mathbf{Y}_n U) / \partial U$ 。但是, 由于该特定表达式中的解 $\lambda_n(t)$ 与等式(2-3)中的解  $\lambda_n(t)$ 不同。因此通常每个系统的  $U_{opt}(t)$  与单个优化器  $U_{opt,n}(t)$ 之间没有关系。

有多种数值方法可用于找到同时满足方程组(3-1), (3-2)和(3-3)的三个解  $\mathbf{Y}_n(t)$ ,  $\lambda_n(t)$  和  $U(t)$ 。它基于对  $U(t)$ 的初始猜测, 用  $U^{(0)}(t)$ 表示。利用该力场, 可对状态方程 (state equations)以及协态方程(co-state equations) 进行求解, 然后将所得的解  $\mathbf{Y}_n(t)$ ,  $\lambda_n(t)$  插入等式(3-3)的左侧。随后将其右侧  $U(t)$ 解释为一种改进的解决方案, 类似于大多数预测-校正方法中采用的数值策略, 用  $U^{(1)}(t)$ 表示。然后再次插入此新函数, 作为对  $U_{opt}(t)$ 的改进猜测, 将其插入方程式(3-1)和(3-2)。然后重复此方案, 迭代至  $U^{(n)}(t)$ 和  $U^{(n+1)}(t)$ 在数值上收敛。

为了独立检查  $U_{opt}(t)$ 的数值解, 我们还使用了梯度下降法和共轭梯度法。在这里, 目标  $J[U(t), \lambda_0] = \sum_n \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T) + \lambda_0 [E - \int_0^T dt U(t)^2]$  仅是  $U(t)$ 和 $\lambda_0$  的函数, 然而,  $J$  取决于  $Y_{i,n}(T)$ , 对于每个给定的  $U(t)$ , 其值需要根据微分方程(3-1)的解确定。但是除了 $\lambda_0$ 之外, 不需要包含任何协态变量 $\lambda_n(t)$ 。在时间网格上的  $M$  个点上对函数  $U(t)$ 进行采样, 其中  $t_m = (m-1)/(M-1)T$  且  $m=1, 2, \dots, M$ , 以使目标  $J$  成为以下:  $(M+1)$ 个参数  $U(t_m) \equiv U_m$  和 $\lambda_0$  的函数。为简单起见, 我们表示所得的 $(M+1)$ 维向量 $(U_1, U_2, \dots, U_M, \lambda_0) \equiv \mathbf{R}$ 。由此产生的 $(M+1)$ 维最大化问题需要对  $\mathbf{R}^{(0)}$ 进行初始猜测, 用于计算 $(M+1)$ 分量梯度向量  $\text{grad}J = \partial J / \partial \mathbf{R}^{(0)} \equiv (\partial J / \partial U^{(0)}_1, \partial J / \partial U^{(0)}_2, \dots, \partial J / \partial U^{(0)}_M, \partial J / \partial \lambda_0^{(0)})$ 。然后, 我们基于标准的二分法执行线搜索, 以找到 $\alpha$ 的值, 该值将在 $(M+1)$ 维向量空间中沿该特定方向沿最大化  $J(\mathbf{R}^{(0)} + \alpha \partial J / \partial \mathbf{R}^{(0)})$ , 即对于 $\alpha = \alpha^{(0)}$ ,  $\partial J(\mathbf{R}^{(0)} + \alpha \partial J / \partial \mathbf{R}^{(0)}) / \partial \alpha = 0$ 。下一条线搜索基于改进后的位置  $\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{R}^{(0)} + \alpha^{(0)} \partial J / \partial \mathbf{R}^{(0)}$ , 并且通过新的梯度 $\partial J / \partial \mathbf{R}^{(1)}$ 给出新的线搜索方向(梯度上升法[69]), 也可以结合使用以前的梯度和新的梯度(Fletcher-Reeves方法[70])。由于计算 $\partial J / \partial \mathbf{R}$ 的每个分量都需要求解微分方程(3-1), 因此该方法占用大量 CPU 运算时间, 但在所需的线搜索次数方面却迅速收敛。

### 3.2.2 集体响应的叠加原理

现在我们将证明，如果时间演化的生成器  $K_n$  采用更简单的形式，则第  $n$  个系统的不同状态变量  $Y_n$  通过时间常数矩阵  $M_n$  和外力场  $U(t)$  相互耦合。输入为加法项，即

$$dY_n/dt = M_n Y_n + V_n U(t) \quad (3-4)$$

那么就可以从单系统优化器  $U_{opt,n}(t)$  的相关知识中准确获得所有系统的集体响应的优化力场。时间常数向量  $V_n$  允许我们将外力不同地耦合到每个振幅  $Y_{i,n}$ 。微分方程是不均匀的，因此两个独立解的总和通常不是同一微分方程的解。由于源项与外力有着特殊的耦合，因此始终可以基于矩阵  $M$  的对角线来精确求解该系统。

在附录 B 中，我们得出了集体响应的叠加原理：

$$U_{opt}(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n a_n U_{opt,n}(t) \quad (3-5)$$

其中与时间无关的幅度因子由  $a_n \equiv -(M^T w_n) V_n / U'_{opt,n}(T)$  确定。我们认为这一新原则是本文研究的主要成果。每个幅度因子  $a_n$  取决于最终时间  $t = T$  时最优控制场的时间导数  $U'_{opt,n}(T)$ ，并且可以容易地从每个系统的解  $U_{opt,n}(t)$  中获得。这些幅度因子  $a_n$  线性地取决于每个振幅  $Y_n$  的给定权重因子  $w_n$  以及外场对每个单独状态振幅的耦合强度  $V_n$ 。

总因子  $(2\lambda_0)^{-1}$  的大小非平凡地取决于每个单独的场  $U_{opt,n}(t)$ ，其取值的唯一目的是保证集体最优控制场满足限定条件  $E = \int_0^T dt U_{opt}(t)^2$ 。由此可以确定方程式(3-5)中线性叠加被构造之后的最终结果。

### 3.3 耦合阻尼谐振子的同时优化

在本节中，我们考虑一个特殊系统，其形式为  $dY_n/dt = M_n Y_n + V_n U(t)$ 。时间常数向量  $V_n$  允许我们将外力不同地耦合到每个振幅  $Y_{i,n}$ 。此处矩阵  $M_n$  与时间无关，但是微分方程是非可加的，因此两个独立解的总和通常不是同一微分方程的解。但是，

由于作为源项（不均匀性）与外力的特殊耦合，因此始终可以基于矩阵  $M$  的对角线精确求解该系统。最重要的是，SPSO 对于该系统而言是精确的。

我们提供了  $U_{opt,n}(t)$  的完全解析解方案，可以对叠加振幅方程 Eq(3-5) 中形式幅度因子  $a_n$  的具体解释。第  $n$  个振子的状态方程由  $dx_n/dt = p_n$  和  $dp_n/dt = -\omega_n^2 x_n - \gamma_n p_n + U(t)$  给出，对应于  $M_n = \{\{0,1\}, \{-\omega_n^2, -\gamma_n\}\}$  和  $V_n = \{0,1\}$ 。因此，我们有哈密顿量

$$H \equiv \sum_n \lambda_n K_n = \sum_n \lambda_{1,n} p_n + \lambda_{2,n} [-\omega_n^2 x_n - \gamma_n p_n + U(t)] \quad (3-6)$$

对于  $x_n(t)$  和  $p_n(t)$  的演化，不应将其与哈密顿量（时间生成器）混淆，后者由于耗散而无法找到。为了简单起见，让我们假设我们尝试以相等的权重优化所有最终振幅  $J \equiv \sum_n x_n(T)$  的总和，或者等效地，我们选择  $w_{1,n} = 1$  和  $w_{2,n} = 0$ ，然后是所需的协态方程：

$$d\lambda_{1,n}/dt = -dH/dx_n = \omega_n^2 \lambda_{2,n} \quad (3-7a)$$

$$d\lambda_{2,n}/dt = -dH/dp_n = -\lambda_{1,n} + \gamma_n \lambda_{2,n} \quad (3-7b)$$

可以用  $\lambda_{1,n}(T) = 1$  和  $\lambda_{2,n}(T) = 0$  解析地求解，得出  $\lambda_{2,n}(t)$  的解

$$\lambda_{2,n}(T) = -2 \exp[\gamma_n(t - T)/2] \sinh[(\gamma_n^2 - 4\omega_n^2)^{1/2}(t - T)/2] / (\gamma_n^2 - 4\omega_n^2)^{1/2} \quad (3-8)$$

在这里我们将  $(\gamma_n^2 - 4\omega_n^2)^{1/2}$  缩写为  $\nu_n \equiv (\gamma_n^2 - 4\omega_n^2)^{1/2}$ 。

由于该解决方案与最优力场  $U_{opt,n}(t)$  直接相关，因此我们应简要讨论该解决方案的时间依赖性。在非耗散极限 ( $\gamma_n = 0$ ) 中，这简化为  $\lambda_{2,n}(t) = -\sin[\omega_n(t - T)]/\omega_n$ 。在相反的过阻尼极限 ( $\omega_n = 0$ ) 中，我们获得  $\lambda_{2,n}(t) = -2 \exp[\gamma_n(t - T)/2] \sinh[\gamma_n(t - T)/2]/\gamma_n$ 。对于  $T > \gamma_n^{-1}$ ，后一个函数在  $t = T$  接近零之前几乎是常数  $\lambda_{2,n}(t) = \gamma_n^{-1}$ 。最值得注意的是，对于  $\omega_n \approx \gamma_n$ ， $\lambda_{2,n}(t)$  随时间缓慢增长以达到接近  $t = T$  的最大值，然后在  $t = T$  衰减为零。从直觉上可以预期到此行为，因为最大化振幅  $x_n(t)$  所需的最优力场  $U_{opt,n}(t)$  仅具有有限的能量  $E$ 。在接近最终相互作用时间时转移此有限量更为有利，因为很早在达到重要的最终时间之前，所有早期激励都会自动衰减。

根据等式(A-14)和(A-15)，并使用  $\partial K_n(\mathbf{Y}_n, U)/\partial U = \mathbf{V}_n = \{0,1\}$ ，第  $n$  个振子的最终最优化外力与  $\lambda_{2,n}(t)$  成正比，

$$U_{opt,n}(t) = (2\lambda_{0,n})^{-1} \lambda_{2,n}(t) \quad (3-9)$$

能量归一化因子为  $(2\lambda_{0,n}) = E^{-1/2} \{\int dt \lambda_{2,n}(t)^2\}^{1/2}$ 。可对该积分求解解析解，得出表达式：

$$\int dt \lambda_{2,n}(t)^2 = \exp(-\gamma_n T) \{4\omega_n^2 + v_n^2 \exp(\gamma_n T) - \gamma_n [\gamma_n \cosh(v_n T) + v_n \sinh(v_n T)]\} / (2\omega_n^2 \gamma_n v_n^2) \quad (3-10)$$

根据等式(B-3)，这些归一化因子( $2\lambda_{0,n}$ )也等于各个最优力相对于所有振子的集体响应的最优力的权重  $a_n$ ，我们得到

$$a_n = E^{-1/2} \int dt \lambda_{2,n}(t)^2 \quad (3-11)$$

这个复杂的表达式基于等式(3-10)在 $\gamma_n = 0$ 的极限中可采用更简单的形式

$$a_n = E^{-1/2} \{[2\omega_n T - \text{Sin}(2\omega_n T)] / (4\omega_n^3)\}^{1/2} \quad (3-12)$$

等效地，也可以从以下形式确定相同的振幅因子： $-(\mathbf{M}^T \mathbf{w}_n) \mathbf{V}_n / U'_{\text{opt},n}(T)$ 。在这里，我们可以使用  $\mathbf{M}_n^T = \{\{0, -\omega_n^2\}, \{1, -\gamma_n\}\} \{1, 0\} = \{\{0, 1\}, \mathbf{V}_n = \{0, 1\}$ 并使用公式(3-7b)， $d\lambda_{2,n}(t)/dt|_{t=T} = -1$ ，可导出  $U'_{\text{opt},n}(T) = -(2\lambda_{0,n})^{-1}$ ，因此得到和 $\gamma_n = 0$ 时相同的表达式。在大频率 $\omega_n$ 的限制下，或者等效地在足够长的相互作用时间( $T \gg 2\pi/\omega_n$ )的限制下，权重因子  $a_n$  随着频率 $\omega_n$ 的增加而减小，即  $a_n \approx E^{-1/2} T^{1/2} / (2^{1/2} \omega_n)$ 。在非常短的交互时间( $T \ll 2\pi/\omega_n$ )的相反极限中，权重因子失去了频率依赖性，即  $a_n \approx E^{-1/2} T^3$ 。这意味着，在这种情况下，集合优化函数的泛函形式仅由  $U_{\text{opt}}(t) \approx (2\lambda_0)^{-1} E^{-1/2} T^3 \sum_n U_{\text{opt},n}(t)$  给出。

我们将用一个简短的数值示例来结束本小节，该示例是有关连续振子的  $U_{\text{opt}}(t)$  的时间依赖性的。为简单起见，我们假设频率 $\omega_n$ 在 $\omega_{\min}$ 和 $\omega_{\max} = \infty$ 之间是均匀分布的。在这种特殊情况下，求和  $U_{\text{opt}}(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n a_n U_{\text{opt},n}(t) = -(2\lambda_0)^{-1} \sum_n \text{Sin}[\omega_n(t-T)]/\omega_n$  可以表示为积分形式：

$$U_{\text{opt}}(t) = -n \int_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega \text{Sin}[\omega(t-T)]/\omega \quad (3-13)$$

其中归一化因子  $n$  保证总能量为  $E$ 。最优集体控制场的脉冲形状取决于 $\omega_{\min}$ 和相互作用时间  $T$  之间的关系。对于 $\omega_{\min} = 0$ ，最优控制场为常数  $U_{\text{opt}}(t) = (E/T)^{1/2}$ 。对于 $\omega_{\min}$ 稍大的值， $U_{\text{opt}}(t)$ 线性增长到接近  $t = T$  的最大值。对于更大的 $\omega_{\min}$ ， $U_{\text{opt}}(t)$ 会随着频率 $\omega_{\min}$ 和幅度呈指数增加而产生振荡。在 $\omega_{\min}$ 很大的极端极限中， $U_{\text{opt}}(t)$ 接近于所有时间（几乎接近最终时间）基本上消失的函数， $U_{\text{opt}}(t) = (E)^{1/2} \delta(t - T)^{1/2}$ 。我们在图

3-1 中显示了几个频率的趋势。

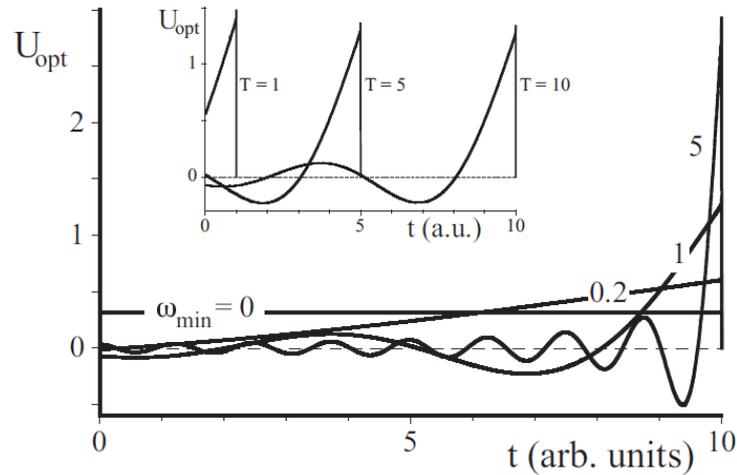


图 3-1 最优力场  $U_{\text{opt}}(t)$  的时间脉冲形状，同时使一组连续的谐振子的所有最终振幅  $x_n(T)$  之和最大化，并且在  $\omega_{\text{min}}$  和无穷大之间具有均匀的频率  $\omega_n$  分布。插图：对于几个相互作用时间  $T$ ， $\omega_{\text{min}}=1$  的最优力场  $U_{\text{opt}}(t)$ 。

Fig.3-1 The temporal pulse shape of the optimal force field  $U_{\text{opt}}(t)$  that simultaneously maximizes sum of all final amplitudes  $x_n(T)$  of a continuous set of harmonic oscillators with a uniform distribution of frequencies  $\omega_n$  between  $\omega_{\text{min}}$  and infinity. Inset: The optimal force field  $U_{\text{opt}}(t)$  for  $\omega_{\text{min}} = 1$  for several interaction times  $T$ .

对于固定的最低频率  $\omega_{\text{min}}$ ，也可以观察到类似的趋势，它是相互作用时间  $T$  的函数。在图 3-1 插图中，我们显示了  $T$  较小时线性增长的  $U_{\text{opt}}(t)$  向仅接近最终时间  $T$  时刻值为非零的过渡。

### 3.4 非谐振子的 SPSO

在本节中，我们将研究一个在  $\mathbf{Y}_n(t)$  中高度非线性的状态方程，但外力  $U(t)$  仍以加性方式耦合为动力学的源项。原子或分子物理学中的许多振子系统都是由 Morse, Lennard-Jones 或其他半经验势函数建模的，这些函数是接近于平衡的谐振子。

由于非线性仅在非常大的激励下出现，因此很明显 SPSO 自然也适用于那些更低激励的系统。在这里，我们希望仅当振幅远离平衡而进入重新存储力显示出偏离胡克定律的区域时，才会出现差异。

为了专门研究非线性响应，我们在本节中有目的地选择一组系统，这些系统从一开始就对任何振幅本质上都是非线性的。我们选择一组四次振子，其状态方程为

$$dx_n/dt = p_n \quad (3-14a)$$

$$dp_n/dt = -\kappa_n x_n^3 + U(t) \quad (3-14b)$$

(3-14b)中具有正的非线性系数 $\kappa_n$ 。此外，为了增强非线性的重要性，我们将粒子初始放置在  $x_n(t=0) = 1$  处，以使它从一开始就经历力场的空间非线性。因此，我们有哈密顿量

$$H \equiv \sum_n \lambda_n \mathbf{K}_n = \sum_n \lambda_{1,n} p_n + \lambda_{2,n} [-\kappa_n x_n^3 + U(t)] \quad (3-15)$$

为了与前一节的结论进行比较，我们尝试再次以相等的权重再次优化所有最终振幅  $J \equiv \sum_n x_n(T)$  的总和，或者等效地，我们选择  $w_{1,n} = 1$  和  $w_{2,n} = 0$ 。然后所需的协态方程采用以下形式：

$$d\lambda_{1,n}/dt = -dH/dx_n = \kappa_n \lambda_{2,n} 3 x_n^2 \quad (3-16a)$$

$$d\lambda_{2,n}/dt = -dH/dp_n = -\lambda_{1,n} \quad (3-16b)$$

其中  $\lambda_{1,n}(T) = 1$ ,  $\lambda_{2,n}(T) = 0$ 。与完全独立于  $U(t)$  的协态方程(3-7)相比，这组方程隐式依赖于  $U(t)$  由于与源项  $\kappa_n \lambda_{2,n}(t) 3 x_n(t)^2$  耦合而产生。显然，状态方程和协态方程的高度非线性耦合需要数值方法来构造  $U_{opt,n}(t)$  和  $U_{opt}(t)$ 。我们注意到，在协态方程中不存在  $U(t)$  的显式依赖关系对于在  $U(t)$  的低  $E$  极限中叠加原理的有效性非常重要。

为了测试叠加原理是否适用于根据方程式(3-5)的集体响应，我们必须为我们的系统计算合适的权重因子  $a_n$ 。由于将  $U(t)$  作为可加源项进行耦合，因此在这里我们又有了  $\partial \mathbf{K}_n(\mathbf{Y}_n, U)/\partial U = \{0, 1\}$ ，使得等式(A-14)在这里预测了集体响应的先验方程  $U(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n \lambda_{2,n}$ ，这也与方程式(B-1)一致。与前一节相反，此处的协态本质上取决于  $U(t)$ ，即  $\lambda_{2,n} = \lambda_{2,n}[t, U(t)]$ ，因此该表达式是一个超越方程，最优  $U_{opt}(t)$  必须满足此式。虽然该方程式包含简单的共同的状态和，并暗示某种“可加性”，但由于其先验性，

它并不意味着叠加原理的有效性。实际上，由此得出的是，每个系统的协态解也不同于单独的协态解，即 $\lambda_{2,n}[t, U_{opt}(t)] \neq \lambda_{2,n}[t, U_{opt,n}(t)]$ 。但是，我们仍然对叠加原理是否适用于该系统展开了研究。

为了研究这个问题，我们计算了两个系统的  $U_{opt,1}(t)$  和  $U_{opt,2}(t)$ ，并将其与  $U_{opt}(t)$  进行了集体响应比较。在两个相同系统的特殊情况下，即 $\kappa_1 = \kappa_2$ ，很明显， $U_{opt,1}(t) = U_{opt,2}(t)$ ，因此我们有 $[U_{opt,1}(t) + U_{opt,2}(t)]/2 = U_{opt}(t)$ 。

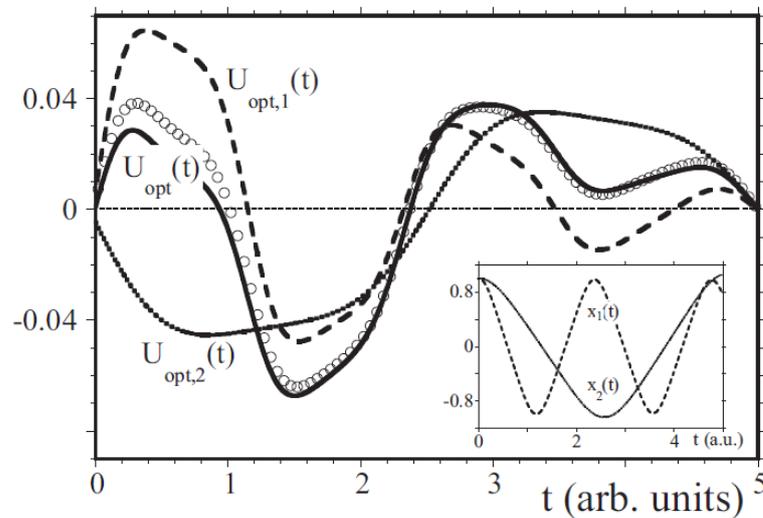


图 3-2 对于两个 $\kappa_1=10$ 和 $\kappa_2=2$ 的四次振子，最优脉冲形状 $U_{opt,1}(t)$ 和 $U_{opt,2}(t)$ （虚线）。实线是最优的 $U_{opt}(t)$ ，以同时最大化两个最终振幅之和，即 $J'' = x_1(T) + x_2(T)$ 。空心圆是 SPSO 对 $U_{opt}(t)$ 的预测。插图显示了分别在 $U_{opt,1}(t)$ 和 $U_{opt,2}(t)$ 优化下的轨迹。（ $E = 0.005$ ）。

Fig.3-2 The optimal pulse shapes  $U_{opt,1}(t)$  and  $U_{opt,2}(t)$  for two quartic oscillators with  $\kappa_1=10$  and  $\kappa_2=2$ . (dashed lines). The continuous line is the optimum  $U_{opt}(t)$  to maximize simultaneously the sum of the two final amplitudes,  $J'' = x_1(T) + x_2(T)$ . The open circles are the predictions of the SPSO for  $U_{opt}(t)$ . The inset show the individual orbits optimized under  $U_{opt,1}(t)$  and  $U_{opt,2}(t)$ . ( $E = 0.005$ ).

让我们讨论相反极限的具体数值示例，其中两个非线性系统有着明显区别，例如 $\kappa_1 = 10$ 和 $\kappa_2 = 2$ 。在图 3-2 的插图中，我们显示了与两个最优场 $U_{opt,1}(t)$ 和 $U_{opt,2}(t)$ 相关的两个幅度 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的时间演化。在没有任何外场的情况下，两个振子（从 $x_{1,2}(t=0) = 1$ 开始）都经历势 $V(x) = \kappa_{1,2}/4 x^4$ ，最初将首先向左加速，然后接近它们在时间 $t = T = 5$ ， $x_1(T) = 0.610$ 和 $x_2(T) = 0.942$ 时的最终振幅。为了使最终振幅最大化，两个

最优场的所需动作会是非常不同的。为了优化第一个振子,  $U_{opt,1}(t)$  必须首先使粒子减速 [ $U_{opt,1}(t) > 0$ ], 而第二个粒子显然需要向左 [ $U_{opt,1}(t) < 0$ ] 使其加速, 以使其最终伸长率最大化。由于时间相关的力场, 最终的最优振幅为  $x_1(T) = 0.757$  和  $x_2(T) = 1.06$ 。随着控制场的可用能量  $E$ , 最终振幅的增强量明显增加。该图还显示了针对集体响应的最优控制场  $U_{opt}(t)$ , 导致  $x_1(T) = 0.723$  和  $x_2(T) = 1.02$ , 这略小于在单个优化下可能达到的最优值。

为了进行比较, 空心圆显示出根据等式(3-5)的叠加原理预测的最优响应, 即

$$U_{opt}(t) = (2\lambda_0)^{-1} [a_1 U_{opt,1}(t) + a_2 U_{opt,2}(t)] \quad (3-17)$$

其中  $a_n \equiv -1/U'_{opt,n}(T)$ 。与确切的  $U_{opt}(t)$  的定性一致性非常显著。当我们增加控制场的可用能量  $E$  时, 我们发现一致性变差了。

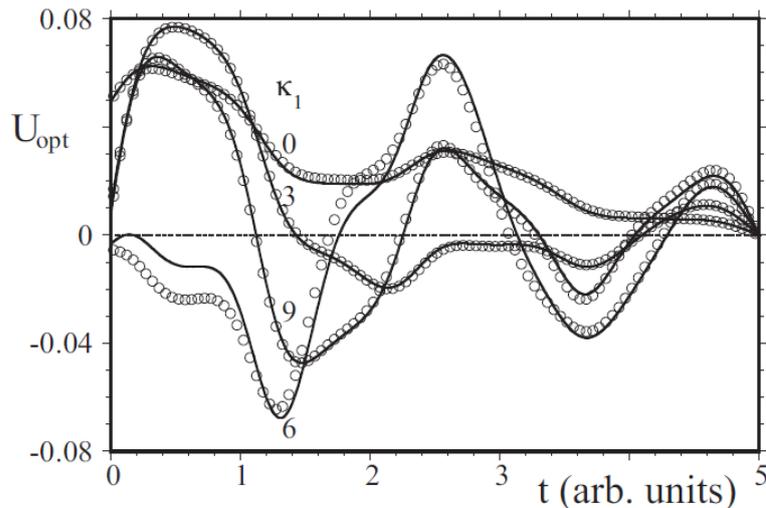


图 3-3 比较两个非线性振子 (具有四个非线性  $\kappa_1 = 0, 3, 6$  和  $9$  且  $\kappa_2 = 10$ ) 的集体响应的精确  $U_{opt}(t)$  以及根据空心圆 ( $E$  表示的 SPSO) 进行的相应预测的比较 ( $E = 0.005$ )。

Fig.3-3 Comparison of the exact  $U_{opt}(t)$  for the collective response of two nonlinear oscillators (with four nonlinearities  $\kappa_1 = 0, 3, 6,$  and  $9$  and  $\kappa_2 = 10$ ) and the corresponding prediction according to the SPSO denoted by the open circles ( $E = 0.005$ ).

为了在更广泛的参数空间中对 SPSO 的适用性进行更一般性的研究, 我们在图 3-3 中显示了精确的集体优化力  $U_{opt}(t)$  与基于 SPSO 的 (近似) 预测的比较, 根据等

式(3-17)，从单个优化函数  $U_{\text{opt},1}(t)$  和  $U_{\text{opt},2}(t)$  及其导数在  $t = T$  处计算得到。我们使第一个振子的非线性度  $\kappa_1$  ( $=10$ ) 保持恒定，并为  $\kappa_2$  选择从 0 到 10 范围内的值。由于非线性程度很大，最优外力  $U_{\text{opt}}(t)$  极其敏感地依赖于  $\kappa_2$ 。考虑到较强的非线性效应，预测的最优化函数和实际的最优化函数在定性上是一致的。

由于脉冲能量  $E$  足够小，因此还可以通过解析方法给出 SPSO 在这种高度非线性系统（其解析解不存在）中出人意料的适用性。我们可以将  $U_{\text{opt}}(t)$  视为状态方程中的微扰，并可以将  $x_n(t)$  的解【在等式(3-14)中为  $U(t) = 0$  获得】插入协态方程(3-16)，尽管无法对该非线性解进行解析求解。等式 (3-16) 没有明确地包含  $U(t)$ ，说明协态方程因此不再依赖于  $U(t)$ 。这意味着拉格朗日函数  $\lambda_{1,n}(t)$  和  $\lambda_{2,n}(t)$  可确定最终  $U_{\text{opt},n}(t)$ ，从而使得 SPSO 对于这种情况精确适用。

总而言之，尽管原本没有期望 SPSO 对本征非线性振子有任何意义，但对于两种特殊情况，它仍然可以给出从  $U_{\text{opt},n}(t)$  预测  $U_{\text{opt}}(t)$  的出人意料的准确指导。在第一种情况下，系统是动态相似的 ( $\kappa_n \approx \kappa_m$ )，更重要的是，在第二种情况下，SPSO 对所有系统（与非线性程度无关）均有效，其中最优外力的总能量很小，并且非线性系统的集合可以被微扰地控制。

### 3.5 一组被驱动的两能级原子的宏观偶极矩的 SPSO

与第 3 节和第 4 节中讨论的两个现有系统相反，我们在此检查 SPSO 用于未将外加控制场作为源项耦合的系统。在这里，状态方程遵循一般形式  $d\mathbf{Y}_n/dt = L_n[U(t)] \mathbf{Y}_n$ 。该集合是线性的，因为生成器  $L_n[U(t)]$  是依赖  $U(t)$  的矩阵，并且两个单独解的总和也自动成为同一微分方程的解。但是，尽管具有这种可加性，但  $\mathbf{Y}_n(t)$  的解析解仅在非常特殊的情况下才可行，因为两个生成器矩阵  $L_n[U(t_j)]$  和  $L_n[U(t_k)]$  通常在不同的时间  $t_j$  和  $t_k$  都不具有对易性。更具体地说，我们现在将检查 SPSO 对于量子力学系统的有效性。我们考虑一组两能级原子，其中的每一个都被耦合到相同的外场  $U(t)$ 。有关量子系统的最优控制理论以及旋转波或扰动逼近中单个两能级系统的优化的内容参见文献[9]。Schrödinger-Hamiltonian 由：

$$H_{QM} \equiv \sum_n [g_n |g;n\rangle\langle g;n| + e_n |e;n\rangle\langle e;n| + U(t) |e;n\rangle\langle g;n| + U(t) |g;n\rangle\langle e;n|] \quad (3-18)$$

给出。集体状态是第  $n$  个原子的基态和激发态的叠加乘积  $|\Psi(t)\rangle = \Pi_n (C_{g,n}(t) |g;n\rangle + C_{e,n}(t) |e;n\rangle)$ 。随时间变化的幅度遵循 Schrödinger 方程  $i \partial |\Psi(t)\rangle / \partial t = H_{QM} |\Psi(t)\rangle$ :

$$i \frac{d C_{g,n}(t)}{dt} = g_n C_{g,n}(t) + U(t) C_{e,n}(t) \quad (3-19a)$$

$$i \frac{d C_{e,n}(t)}{dt} = e_n C_{e,n}(t) + U(t) C_{g,n}(t) \quad (3-19b)$$

为了将复振幅转换为实变量，我们可以引入 Bloch 矢量：

$$S_{1,n}(t) \equiv C_{g,n}(t) C_{e,n}(t)^* + C_{g,n}(t)^* C_{e,n}(t) \quad (3-20a)$$

$$S_{2,n}(t) \equiv -i [C_{g,n}(t) C_{e,n}(t)^* - C_{g,n}(t)^* C_{e,n}(t)] \quad (3-20b)$$

$$S_{3,n}(t) \equiv |C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n}(t)|^2 \quad (3-20c)$$

这些变量还使我们能够包括唯象学上有限的横向均质寿命阻尼项，参见[71,72]。如果我们将能级间距简写为  $\omega_n \equiv e_n - g_n$ ，则运动方程变为：

$$\frac{d S_{1,n}(t)}{dt} = -\omega_n S_{2,n}(t) - \gamma_n S_{1,n}(t) \quad (3-21a)$$

$$\frac{d S_{2,n}(t)}{dt} = \omega_n S_{1,n}(t) - 2 S_{3,n}(t) U(t) - \gamma_n S_{2,n}(t) \quad (3-21b)$$

$$\frac{d S_{3,n}(t)}{dt} = 2 S_{2,n}(t) U(t) - \Gamma_n [S_{3,n}(t) + 1] \quad (3-21c)$$

用  $S_{1,n}(t=0) = S_{2,n}(t=0) = 0$  以及  $S_{3,n}(t=0) = -1$  求解。注意，由于项  $S_{3,n}(t) U(t)$  和  $S_{2,n}(t) U(t)$  导致外场的非加性耦合。

这里的目标是得到最优激光脉冲  $U_{opt}(t)$ ，以使得脉冲  $J = \sum_n S_{1,n}(T)$  之后的最终宏观偶极矩最大。最优控制理论的最终哈密顿量为：

$$H = \sum_n \{ \lambda_{1,n} (-\omega_n S_{2,n} - \gamma_n S_{1,n}) + \lambda_{2,n} (\omega_n S_{1,n} - 2 S_{3,n} U - \gamma_n S_{2,n}) + \lambda_{3,n} (2 S_{2,n} U - \Gamma_n [S_{3,n} + 1]) \} \quad (3-22)$$

得出以下关于 Lagrange 函数  $\lambda_{i,n}$  的协态方程

$$\frac{d \lambda_{1,n}(t)}{dt} = \gamma_n \lambda_{1,n}(t) - \omega_n \lambda_{2,n}(t) \quad (3-23a)$$

$$\frac{d \lambda_{2,n}(t)}{dt} = \omega_n \lambda_{1,n}(t) + \gamma_n \lambda_{2,n}(t) - 2 U(t) \lambda_{3,n}(t) \quad (3-23b)$$

$$\frac{d \lambda_{3,n}(t)}{dt} = 2 U(t) \lambda_{2,n}(t) - 2 U(t) \lambda_{3,n}(t) + \Gamma_n \lambda_{3,n}(t) \quad (3-23c)$$

可以用 $\lambda_{1,n}(T) = 1$  和 $\lambda_{2,n}(T) = \lambda_{3,n}(T) = 0$  求解。巧合的是，状态方程和协态方程非常相似。尽管这组方程与状态方程在形式上是解耦的，但由于项 $U \lambda_{2,n}$  和 $U \lambda_{3,n}$  的存在，使得 $U(t) = U_{opt,n}(t)$ 和 $U(t) = U_{opt}(t)$ 对应的解 $\lambda_{1,n}(T)$ 之间不允许存在任何关系，而这一点是 SPSO 成立所明确要求的条件。

但是，在两种重要的限制情况下，会变得有效。当阻尼 $\Gamma_n$  足够大，脉冲能量  $E$  短时(或等效的总相互作用时间 $T$  小于原子的 Rabi 周期)，这两种情况可以实现 SPSO。然后我们可以假设 $S_{3,n}(t)$ 的求逆使得 $S_{3,n}(t) = -1 + \varepsilon(t)$ ，因此，最后一个方程可以与 $S_{1,n}(t)/dt$  和 $S_{2,n}(t)/dt$  去耦合，得到：

$$d S_{1,n}(t)/dt = -\omega_n S_{2,n}(t) - \gamma_n S_{1,n}(t) \quad (3-24a)$$

$$d S_{2,n}(t)/dt = \omega_n S_{1,n}(t) - \gamma_n S_{2,n}(t) + 2 U(t) \quad (3-24b)$$

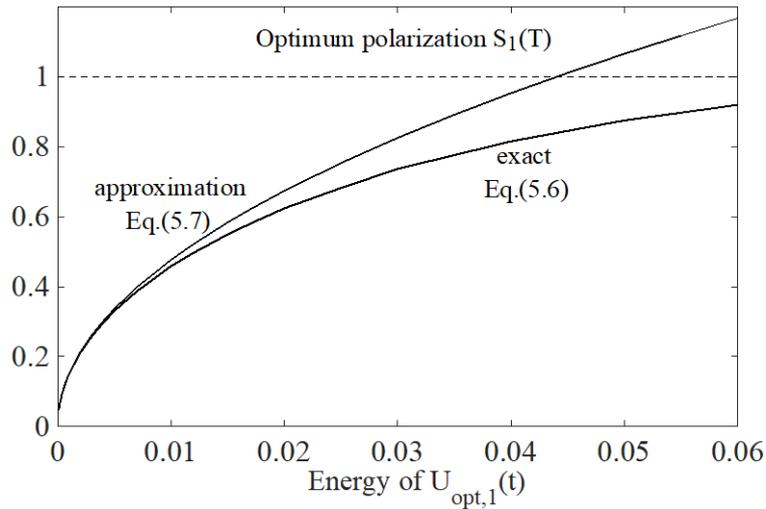


图 3-4 被驱动的两能级原子的最优脉冲形状的最终极化  $S_1(T)$  作为脉冲 ( $T = 11.3$ ,  $\omega_1 = 1/(2\pi)$ ,  $\gamma_n = 0$ ) 固定能量的函数。

Fig.3-4 The final polarization  $S_1(T)$  for the optimal pulse shape for a driven two-level atom as a function of the fixed energy of the pulse ( $T = 11.3$ ,  $\omega_1 = 1/(2\pi)$ ,  $\gamma_n = 0$ ).

为了测试关于优化方案的近似值的可靠性，我们以固定的总脉冲能量  $E = \int dt U(t)^2$  数值求解了最优激光脉冲的第  $n$  个原子的最终偏振  $S_{1,n}(T)$ 。对于 $\omega_n = 2\pi$  和  $T = 11.3$ ，我们将根据精确理论(3-23)与近似值(3-24)的预测作为脉冲能量  $E$  的函数

进行比较, 如图 3-4 所示。我们发现, 对于脉冲能量  $E$  而言, 近似值(3-24)出人意料地有效, 因为脉冲能量  $E$  的极化几乎是其最大总值 $[S_1(T) = 1]$ 的 50%。

需要注意的是, 在这种弱场近似中, 外加激光场以加法方式耦合到运动方程。这意味着, 如果我们优化激光脉冲末端的集体宏观偏振 (在此由  $S_1(t) \equiv \sum_n S_{1,n}(t)$  给出), 则自动适用第 2 节中得出的叠加原理。在此限制下, 哈密顿量采用  $H = \sum_n \{\lambda_{1,n} (-\omega_n S_{2,n} - \gamma_n S_{1,n}) + \lambda_{2,n} (\omega_n S_{1,n} + 2U - \gamma_n S_{2,n})\}$  的形式, 协态方程采用以下形式:

$$d \lambda_{1,n}(t)/dt = -\omega_n \lambda_{2,n}(t) + \gamma_n \lambda_{1,n}(t) \quad (3-25a)$$

$$d \lambda_{2,n}(t)/dt = \omega_n \lambda_{1,n}(t) + \gamma_n \lambda_{2,n}(t) \quad (3-25b)$$

得出  $\lambda_{2,n}(t) = \exp[\gamma_n(t-T)] \sin[\omega_n(t-T)]$  的解。应用公式(A-14)构造集体最优控制  $U_{opt}(t)$  以最大化  $S_1(t) \equiv \sum_n S_{1,n}(t)$  然后采用  $U_{opt}(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n 2 \lambda_{2,n}(t)$  的形式, 使得我们有

$$U_{opt}(t) = (\lambda_0)^{-1} \sum_n \exp[\gamma_n(t-T)] \sin[\omega_n(t-T)] \quad (3-26)$$

如果我们假设具有无限均匀分布的跃迁频率为  $\omega_n$  的原子的整体, 在  $\omega_{min}$  和  $\omega_{max}$  之间, 则  $\sum_n \rightarrow \text{const.} \int d\omega$ , 并假设相同的阻尼常数  $\gamma_n \equiv \gamma$ , 则最优脉冲形状变为

$$U_{opt}(t) = N \exp[\gamma_n(t-T)] \{\cos[\omega_{min}(t-T)] - \cos[\omega_{max}(t-T)]\} / (t-T) \quad (3-27)$$

其中归一化常数  $N$  保证  $\int dt U_{opt}(t)^2 = E$ 。

在图 3-5 中, 我们为  $\gamma = 0$  提供了  $U_{opt}(t)$  的典型示例。随着阻尼的增加, 早期的振荡消失, 更多的脉冲能量移向最终时间  $T$ , 接近接近  $t = T$  的单个峰值分布。

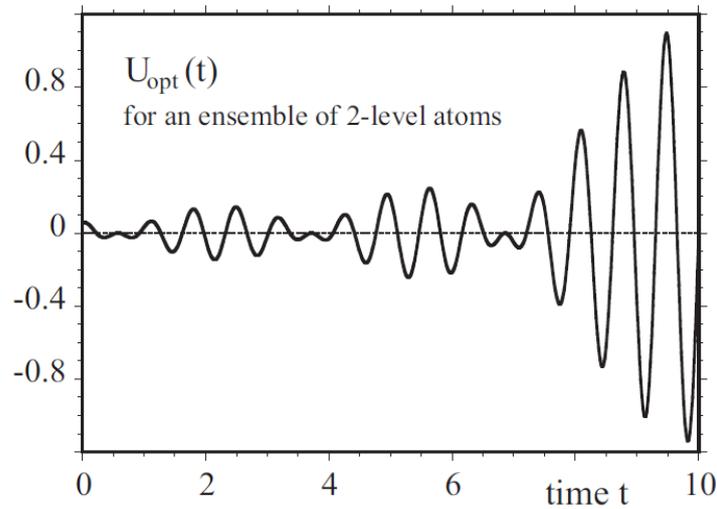


图 3-5 最优化场  $U_{\text{opt}}(t)$  (以  $E^{1/2}$  为单位), 以使过渡频率  $\omega$  在  $8 < \omega < 10$  且等效阻尼  $\gamma = 0$  范围内的两能级原子分布的最终宏观偶极矩最大化。

Fig.3-5 The optimal field  $U_{\text{opt}}(t)$  (in units of  $E^{1/2}$ ) to maximize the final macroscopic dipole moment of a distribution of two-level atoms with transition frequencies  $\omega$  in the range of  $8 < \omega < 10$  and equal damping  $\gamma = 0$ .

### 3.6 总结与展望

总而言之, 我们给出了同时优化一组动力学系统的最终集体响应的叠加原理, 该原理使我们能够分别从每个子系统的最优力场  $U_{\text{opt},n}(t)$  的加权叠加来预测整个系统的最优控制场  $U_{\text{opt}}(t)$ 。权重与最后时刻的时间导数  $U'_{\text{opt},n}(T)$  成反比。需要指出的是, 对于状态方程的单个解之和不是最终解的系统, 该原理可能是精确的, 但对于那些解决方案是可加的系统, 它未必完全有效。我们已经说明了几种系统的 SPSO, 并建议即使对于严格无效的系统 (非线性振子或两能级系统), 它也可以在某些情况下 (当控制场的总能量较小或相互作用时间较短) 提供对最优控制外场  $U_{\text{opt}}(t)$  预测的指导。

SPSO 也开启了未来许多方向的研究之门, 例如 SPSO 可直接应用于激光诱导的真空击穿的最优化相关研究, 即优化后的高度聚焦的激光脉冲的光子能量可以用来最大化产生正负电子对[73]。最近, Kohlfürst [32,74]和 Hebenstreit 以及 F. Gourdeau [33] 等人认为, 最优控制理论可以用于确定最优电磁场配置的时间依赖性, 该时间依赖性

将最优化正负电子对产生率。由于对计算时间的巨大需求，到目前为止，本研究中的大多数研究都集中在有限维优化上，其中通常对某些相位，幅度或空间长度标度进行了优化[75]。但是，如果电磁场在空间上的不均匀性在相互作用中可以被忽略，且这些场是非平凡的[22]，那么可以将含时电场与真空状态的相互作用精确地映射到无限组的未耦合两能级系统上，该系统的能量分离超过了电子静止质能的两倍，即 $\omega_{\min} > 2mc^2$ 。这时的理论研究框架几乎可以等同于第五小节中所研究的框架，在第五小节中，我们已经证明了 SPSO 非常适合于为短相互作用时间的最优化问题提供准确的预测。

## 第四章 正负电子对产生的含时及空间依赖外场的分别优化

在用量子场论研究正负电子对产生的理论框架下, Kolfürst、Hebenstreit 和 F. Gourdeau 等人提出可以采用最优控制理论来确定使得正负电子对产额最大的最优电磁场配置的时间依赖性。考虑到对计算时间的巨大需求, 到目前为止, 本研究中的所有研究都集中在有限维优化上, 通常只对场的相位、幅度或空间长度进行了优化[75]。尽管这些研究取得了一定的成果, 但由于仅限于两个或三个参数的优化, 仅表征了相当有限的电场范围, 这严重限制了对外场的空间或时间依赖性的优化。

在场的分布是空间均匀的情况下, 要产生稳定的正负电子对, 电场的振幅不必是超临界的, 因为这里的主要产生过程是从狄拉克海的负能态到满足狄拉克方程[76,77,78,79]正能量解的能级的多光子跃迁。当场在时间上是均匀分布时(即不含时), 空间场必须是超临界的, 即对应真空中的 Schwinger 隧穿过程。在本章中, 我们将基于最新发展的算法, 将对含时或空间变化的场的优化从有限维扩展到无限维的更一般情况。为了从更基本的角度研究优化问题, 我们的目的是为外场探索更通用的优化函数形式。其中, 对于含时外场而言, 仅有的对固定脉冲形状的约束是通过固定其能量来限定的。

第一部分将介绍无限维含时外场的优化。这项工作的主要结论有三方面: 首先, 它表明将无限维最优控制理论应用于正负电子对产生这一点在计算上是可行的; 其次, 我们表明在给定的动量范围内, 使正电子产额最大化的最优脉冲形状的时间依赖性可以通过具有极高准确性的简单解析表达式来近似; 第三, 这项工作借鉴文献[80]的方法, 引入了叠加原理, 用于同时优化经典振子类系统集合的集体响应, 我们证实了该原理也适用于正负电子对产生的优化研究。我们发现, 使用一组选定的动量来优化正电子的最终总产额的特定外场可以直接与那些外场的简单线性叠加相关, 从而使特定动量的正电子产额最大化; 还可以从特征值问题中获得相应的膨胀系数。本部分的安排如下: 在第 1 小节中, 我们介绍该模型, 并回顾如何将空间均匀场中的配对生

成动力学映射到相互解耦的两级方程组，每个方程组描述给定动量的正电子产生率。在第 2 小节中，我们介绍了四种不同的优化方案，并研究了微扰（解析）和非微扰状态下的最优外场。在第 3 小节中，我们检查场的特定约束类型如何影响最优化场。在第 4 小节中，我们通过将解析表达式的预测与通过计算获得的针对特定情况对应的最优场进行比较，来证明这些表达式的有效性。

第二部分将主要介绍空间相关外场的优化。在这项工作中，我们首次对外场的空间依赖性进行了无穷大优化。初步结果与人们对含时外场的工作所期望的相反，最大的正负电子对产额不一定与奇异的和技术上无法实现的极限情况（例如无限振幅或无限能量的无限狭窄领域）有关。换句话说，为了避免这些技术上不可行的解决方案，我们甚至不需要人为地限制搜索算法。本部分的结构安排如下：在第 1 小节中，我们简要概述了 Dirac 方程的理论框架，并提供了有关计算优化的先前工作的参考。在第 2 小节中，我们提供了外场的空间形状，这些空间形状针对固定的正电子能量优化了对的产生效率。在第 3 小节中，我们研究了基于狄拉克-哈密顿量负能量本征态之间共振的物理图像，这一物理图像可以对正负电子对产生的放大机制进行解释。我们还引入了一个具有两阶梯结构的电势，该电势与数值求解得到的最优电势是类似的，而且我们可以对该电势如何产生正负电子对进行解析求解。在第 4 小节中，我们回到数值求解无限维优化的问题，并构造出使正负电子对产额最大化的最优电势的空间形式。

第三部分中我们对本章的关键问题进行了总结，对未来的研究做出了展望。

## 4.1 真空中产生正负电子对的含时外场的无限维优化

### 4.1.1 系统模型

如果电场是空间均匀的，则正负电子对产生的动力学过程可以在时间规范中通过由一个含时的矢势  $A(t)$  来描述。在一维情况下和原子单位制中，狄拉克哈密顿量具有以下形式：

$$H = c \sigma_1 [P - qA(t)/c] + c^2 \sigma_3 \quad (4-1)$$

这里我们假设耦合到电荷为  $q = +1$  的正电子。这里  $P$  是动量算符， $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  表示  $2 \times 2$  Pauli 矩阵。在这项工作中，我们将使用无外力哈密顿量的本征态作为基础，定义为  $H_0 |p;u\rangle = e_p |p;u\rangle$  和  $H_0 |p;d\rangle = -e_p |p;d\rangle$ ，其中能量  $e_p \equiv [c^4 + c^2 p^2]^{1/2}$ 。对于动量  $p$ ，该集合的空间表示由两个分量旋子给出： $\langle x|p;u\rangle = N \{ [c^2 + e_p]^{1/2}, [e_p - c^2]^{1/2} p/|p| \} \exp[ipx]$  和  $\langle x|p;d\rangle = N \{ -[e_p - c^2]^{1/2}, [c^2 + e_p]^{1/2} p/|p| \} \exp[ipx]$ ，其中  $N$  是对应的归一化因子。由于正则动量是守恒的，即  $[P, H] = 0$ ，所以外场  $A(t)$  只能耦合具有相同动量  $|p;d\rangle$  和  $|p;u\rangle$  的态。换句话说，整个正负电子对产生动力学过程等效于相互独立的两能级系统的无穷集合的集体动力学。因此，我们可以将  $H$  重写为所有动量的独立哈密顿量的总和：

$$H \equiv \sum_p [e_p |p;u\rangle\langle p;u| - e_p |p;d\rangle\langle p;d| - A(t) V_{\text{dia}} - A(t) V_{\text{off}}] \quad (4-2)$$

这里，对角线和非对角线耦合由：

$$V_{\text{dia}}(t) \equiv \langle p;u| \sigma_1 |p;u\rangle |p;u\rangle\langle p;u| + \langle p;d| \sigma_1 |p;d\rangle |p;d\rangle\langle p;d| \quad (4-3a)$$

$$V_{\text{off}}(t) \equiv \langle p;d| \sigma_1 |p;u\rangle |p;d\rangle\langle p;u| + \langle p;u| \sigma_1 |p;d\rangle |p;u\rangle\langle p;d| \quad (4-3b)$$

给出。使用上面的能量本征态的函数形式，每个  $p$  的四个矩阵元素的形式为  $\langle p;u| \sigma_1 |p;u\rangle = c p/e_p \equiv a_p$ ， $\langle p;d| \sigma_1 |p;d\rangle = -a_p$  以及  $\langle p;d| \sigma_1 |p;u\rangle = \langle p;u| \sigma_1 |p;d\rangle = c^2/e_p \equiv b_p$ 。对于单个动量  $p$ ，态是上下层的叠加， $|\Psi_p(t)\rangle = C_{p;d}(t) |p;d\rangle + C_{p;u}(t) |p;u\rangle$ 。随时间变化的幅度来自狄拉克方程  $i \partial |\Psi_p(t)\rangle / \partial t = H |\Psi_p(t)\rangle$  [81]：

$$i d C_{p;u}(t) / dt = [e_p - A(t) a_p] C_{p;u}(t) - A(t) b_p C_{p;d}(t) \quad (4-4a)$$

$$i d C_{p;d}(t) / dt = -A(t) b_p C_{p;u}(t) - [e_p - A(t) a_p] C_{p;d}(t) \quad (4-4b)$$

从计算角度来看，我们发现将复振幅转换为三个实变量会降低计算量，定义为：

$$S_1(t) \equiv C_{p;d}(t) C_{p;u}(t)^* + C_{p;d}(t)^* C_{p;u}(t) \quad (4-5a)$$

$$S_2(t) \equiv -i [C_{p;d}(t) C_{p;u}(t)^* - C_{p;d}(t)^* C_{p;u}(t)] \quad (4-5b)$$

$$S_3(t) \equiv |C_{p;u}(t)|^2 - |C_{p;d}(t)|^2 \quad (4-5c)$$

这组 Bloch 矢量 [82] 满足以下方程组：

$$d S_1(t) / dt = -2 \alpha(t) S_2(t) \quad (4-6a)$$

$$d S_2(t) / dt = 2 \alpha(t) S_1(t) - 2 \beta(t) S_3(t) \quad (4-6b)$$

$$d S_3(t) / dt = 2 \beta(t) S_2(t) \quad (4-6c)$$

在这里，我们介绍了耦合  $\alpha(t) \equiv e_p - A(t) a_p$  和  $\beta(t) \equiv -A(t) b_p$ ，初始条件为  $S_1(t=0) = S_2(t=0) = 0$  和  $S_3(t=0) = -1$ 。因此，动量为  $p$  的正电子的数密度由  $N(p,t) \equiv |C_{p,u}(t)|^2 = [1 + S_3(t)]/2$  给出。

#### 4.1.2 对单一动量的优化

在本节中，我们研究如何构造最优电场脉冲所应具有的时间波形，对于给定的电子动量  $p$ ，该电场波形可以使得产生正电子的最终数量  $N(p,T)$  最大化。为了避免  $A(t)$  的无限解，我们将向量势的时间积分约束为有限值  $E = \int dt A(t)^2$ ，积分极限从  $t = 0$  延伸到  $T$ 。即使  $E$  不对应于相关电场的真实电磁能，我们在下面为简单起见也将其表示为“能量”。这意味着此优化问题是具有相对普遍性的，因为它的特征仅在于两个给定参数  $E$  和  $T$ 。我们总结了用于确定给定  $E$  和  $T$  的最优脉冲形状  $A_{opt}(t)$  的数值算法，这些算法包括预测-校正方法，梯度上升法[69]，基于 Fletcher-Reeves[70]和基于 Polak-Ribiere [83]的共轭梯度方法。它们的区别在于计算效率，准确性以及发现全局最大值以及区分鞍点解和最大值的能力。这些算法均需要对  $A(t)$ 进行初始猜测，然后对其进行迭代改进，直到相应的  $N(p,T)$ 不再随着迭代次数的增加而增加。

在图 4-1 中，我们展示了  $p = 60$  a.u.的最终粒子数  $N(p,T)$  和迭代次数的函数关系，其中  $E = 6000$ ， $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ 。时间单位  $2\pi / (2c^2)$ 由动量  $p = 0$  的上下能量状态之间的最小能量间隔  $2c^2$  提出。所有四个计算方案都使用相同的含时常数场  $A^{(0)}(t) = (E/T)^{1/2}$  作为初始猜测，而初始猜测产生了较低的最终产额  $N(p,T) = 7.96 \times 10^{-4}$ 。为了保证所有算法都收敛到全局最大值  $N(p,T)$ ，我们随后改变了对  $A(t)$ 的初始猜测的选择。此后所有四种算法都很好地收敛到全局最大值  $N(p,T) = 0.661$ ，如水平虚线所示。

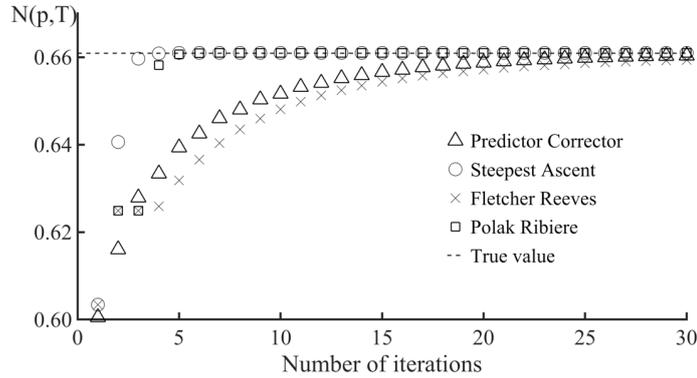


图 4-1 对于四种不同的数值优化算法，最终粒子数  $N(p, T)$  为迭代次数的函数。我们使用了动量  $p = 60$  a.u.，以及初始猜测  $A(t) = (E/T)^{1/2}$ 。脉冲能量被限制在  $E = 6000$  a.u.，总的相互作用时间为  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ 。

Fig.4-1 The final population  $N(p, T)$  as a function of the number of iterations for four different computational optimization algorithms. We used the momentum  $p = 60$  a.u., and the initial guess  $A(t) = (E/T)^{1/2}$ . The pulse energy was constrained to  $E = 6000$  a.u. and the total interaction time was  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ .

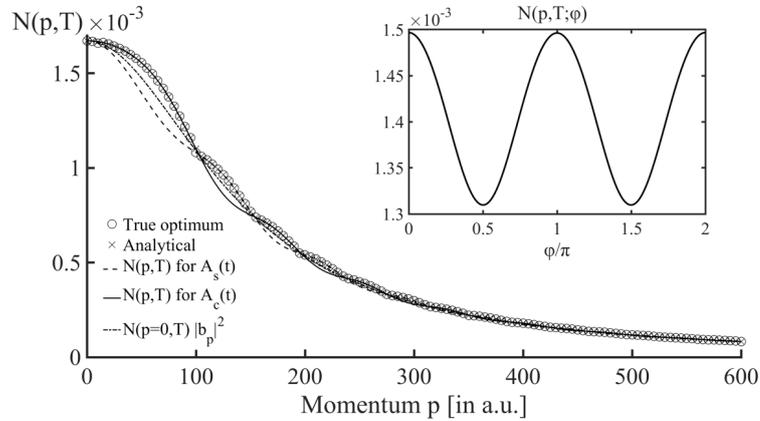


图 4-2 正能级  $N(p, T)$  的最大可能产额作为动量的函数(空心圆)。实线和虚线是两个给定外场(4-7a)和(4-7b)的解。为了比较，点划线为  $0.00167 |b_p|^2$ 。脉冲能量被限制为  $E = 10$  a.u.。总的相互作用时间为  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ 。

Fig.4-2 The largest possible population of the upper level  $N(p, T)$  as a function of the momentum (open circles). The continuous and dashed lines are the solutions for two given external fields (4-7a) and (4-7 b). For comparison, the dot-dashed line is  $0.00167 |b_p|^2$ . The pulse energy was constrained to  $E = 10$  a.u. and the total interaction time to  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ .

我们的解析研究首先关注微扰机制,在该机制下该场没有足够的时间  $T$  或能量  $E$  来充分把电子从负能带激发至正能级。为了发现在最优条件下最容易填充哪些动量态,图 4-2 中计算了每个  $p$  的最优脉冲,然后绘制了与(最优)脉冲相互作用后对应的(最大可能的)粒子数  $N(p,T)$ 。由于明显的对称性  $p \rightarrow -p$ ,可以只专注于正动量。随着  $p$  的增加, $N(p,T)$ 几乎单调减少,这表明最容易产生静止的正电子。这与等式(4-4)中的非对角耦合元素  $-A(t) b_p$  是一致的,随着  $p$  的增加单调下降。为了进行比较,我们在图 4-2 中通过点划线包括了耦合  $|b_p|^2$  的(成比例的)平方。 $|b_p|^2$  与最优最终数  $N(p,T)$  的比例随动量增加的一致性非常好,即  $N(p,T) \sim |b_p|^2$ 。

我们还注意到叠加在递减函数上的意外振荡结构,这种额外的结构与每个最优场随动量增加的变化性质有关。它随着  $p$  的增加以及交互时间  $T$  的增加而消失。现在让我们检查最大化  $N(p,T)$  的最优场  $A(t)$  的形式。使用最优控制理论的框架,可以在扰动状态下为最优领域推导以下两个可能的候选者:

$$A_c(t) = A_{0c} \text{Cos}[2e_p(t-T/2)] \quad (4-7a)$$

$$A_s(t) = A_{0s} \text{Sin}[2e_p(t-T/2)] \quad (4-7b)$$

其中  $A_{0c} \equiv E^{1/2} [T/2 + \text{Sin}(2e_p T)/(4e_p)]^{-1/2}$  和  $A_{0s} \equiv E^{1/2} [T/2 - \text{Sin}(2e_p T)/(4e_p)]^{-1/2}$  分别是偶函数和奇函数的相应归一化因子( $t = T/2$ )。我们已经将确切最优场的最终数(数值求解)与方程(4-7)的两个给定场相关的相应数目关联在一起。出色的匹配表明最优解在(4-7a)到(4-7b)之间来回变化。例如,对于产生的最慢正电子( $0 < p < 103 \text{ a.u.}$ ),真正的最优化场在图形上与等式(4-7a)给出的偶函数没有区别。对于动量的下一个区间( $103 \text{ a.u.} < p < 153 \text{ a.u.}$ ),奇函数(4-7b)成为最优场,依此类推。如人们所料,两个三角函数解都以频率  $2e_p$  随时间振荡,该频率恰好对应于两个耦合正负能级的能量差,然而与  $T/2$  相对应的相位因子却是在预料之外的。

我们可以通过增加脉冲能量  $E$  来探测非微扰区间,从而使场  $A(t)$  可以将下能级的粒子完全转移到正能级,即  $N(p,T) = 1$ 。在图 4-3 中,我们显示了最优的最终正电子产额  $N(p,T)$  作为五个不同脉冲能量  $E$  的正电子动量  $p$  的函数。对于  $E = 10$ ,我们看到,与能量  $E$  无关,对于具有低动量的正电子,最大化其产额总是最容易的。

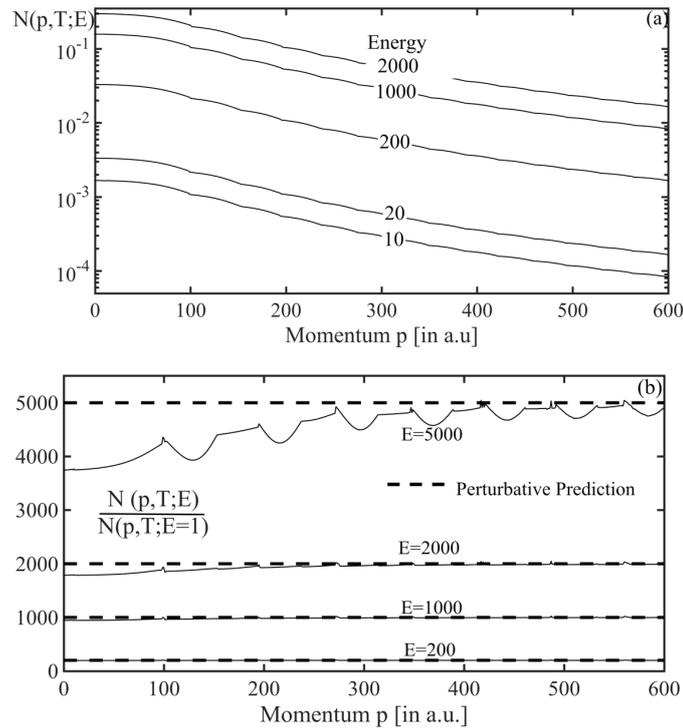


图 4-3 (a) 正能级的最终产额  $N(p,T)$  作为五个不同脉冲能量  $E$  的动量的函数。总的相互作用时间为  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ 。(b) 对于四个能量, 比率  $N(p,T;E) / N(p,T;E=1 \text{ a.u.})$  为  $p$  的函数。为了进行比较, 水平虚线是从微扰机制的线性比例所期望得到的产生率。

Fig.4-3 (a) The final population of the upper level  $N(p,T)$  as a function of the momentum for five different pulse energies  $E$ . The total interaction time to  $T=2 \times 2\pi / (2c^2)$ . (b) The ratio  $N(p,T;E) / N(p,T;E=1 \text{ a.u.})$  as a function of  $p$  for the four energies. For comparison, the horizontal dashed lines are the ratios expected from the linear scaling of the perturbative regime.

如果能量  $E$  超过大约  $E = 13025$ , 则  $p = 0$  的最优化场几乎可以完全将负能级电子激发至正能级,  $N(p=0,T) > 0.99$ 。在微扰的低能量区域中, 最终产额与能量  $E$  线性相关, 因此, 函数  $N(p,T)$  都具有相同的形状。为了说明这种行为, 我们在图 4-3b 中绘制了比率  $N(p,T;E) / N(p,t;E = 1 \text{ a.u.})$  作为  $p$  的函数的图。  $E$  较小时的常数图证实了最终正电子产额与能量  $E$  的线性比例关系。对于更大的  $E$ , 随着  $N(p,T)$  接近其最大可能的单位值, 我们看到了与线性结果的预期偏差。当  $p$  较小时越接近这个上限时, 我们看

到随着  $E$  的增加, 较小  $p$  的非微扰校正会首先出现。尽管随着  $E$  的增加  $N(p,T)$  的缩放比例表明存在不同的机制, 最优场  $A_{\text{opt}}(t)$  的相应函数形式也偏离了等式(4-7a)给出的简单周期形式。

在图 4-4 中展示了当外场能量提高, 进入非微扰区间时, 最优脉冲如何开始与式 4-7a 不同。对于  $E = 1.5 \times 10^4$ , 尽管它可以诱导近乎完美的最终产额  $N(p,T) = 0.9952$ , 但最优场(圆形)仍几乎与扰动形式(连续图)相同。对于  $E = 2 \times 10^4$ , 对应于  $N(p,T) = 0.9999$ , 我们开始看到最优场  $A_{\text{opt}}(t)$  与简单余弦函数的偏差, 在  $t = T/2$  时尤其明显。

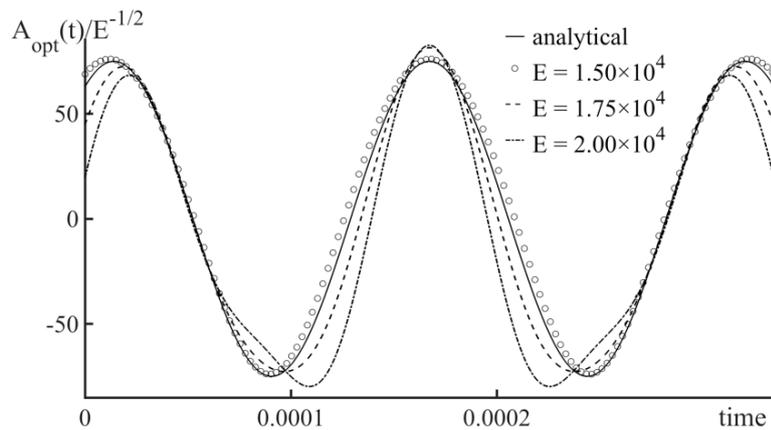


图 4-4 三种不同的能量  $E$  以及动量  $p = 60$  对应的最优外场  $A_{\text{opt}}(t)$ 。总的相互作用时间为  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ 。

Fig.4-4 The optimum field  $A_{\text{opt}}(t)$  for three different energies  $E$  and momentum  $p = 60$ . The total interaction time was  $T = 2 \times 2\pi / (2c^2)$ .

对于更大的能量, 正负电子对的产生将进入另外一个机制, 在该机制下寻找唯一的全局最大值  $A_{\text{opt}}(t)$  将变得无关紧要。这是因为, 在这种情况下, 对于给定的动量, 存在许多不同的函数形式, 都可以使得最终激发的正电子产额的最优值  $N(p,T) > 0.9999$ 。此时函数集  $A_{\text{opt}}(t)$  彼此相等, 即使(由于它们不同的时间依赖性)  $N(p,t)$  趋于统一(从初始值  $N(p,t=0) = 0$ ) 的路径可能非常不同。

## 4.1.3 能量约束对最优化外场的影响

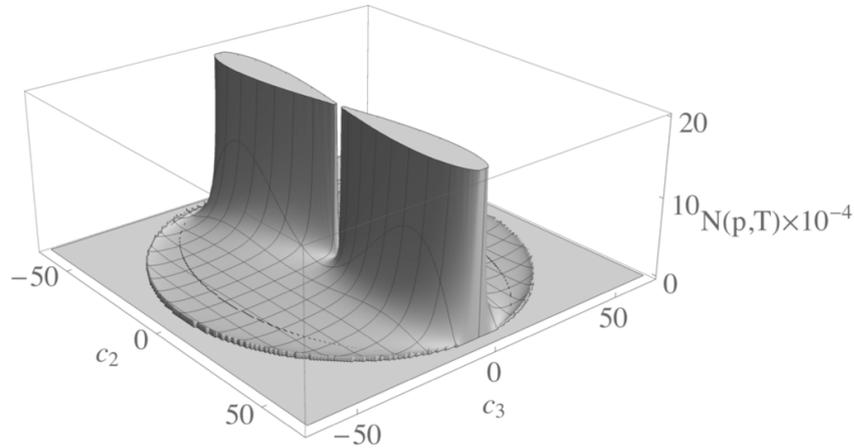


图 4-5 由场系数  $c_2$  和  $c_3$  参数化的最优场  $A(t)$  的最终产额  $N(p,T)$ 。[总的相互作用时间为  $2 \times 2\pi/(2c^2)$ ，脉冲能量为  $E = 10^9$ ，动量为  $p = 60 \text{ a.u.}$ ，两个半轴为  $L_2=61.72$  以及  $L_3=58.08$ ]。

Fig.4-5 The final population  $N(p,T)$  for the optimum fields  $A(t)$  parametrized by the field coefficients  $c_2$  and  $c_3$ . [The total interaction times is  $2 \times 2\pi/(2c^2)$ , the pulse energy is  $E = 10^9$  and the momentum is  $p=60$  a.u., the two semi-axes are  $L_2=61.72$  and  $L_3=58.08$ ].

在图 4-5 中，对于  $p = 60 \text{ a.u.}$  和  $E = 10^9 \text{ a.u.}$ ，我们将  $N(p,T)$  绘制为  $c_2$  和  $c_3$  的函数。在这种情况下，最终产额在  $c_2 = \pm 43.64$  且  $c_3$  接近零时最大。这对应于  $c_1 = 8.72 \times 10^4$ ，而  $c_0$  趋于无穷大。尽管这四个参数的微扰近似允许  $N(p,T)$  的无穷大最终值（这是非物理的），但它仍可以作为非微扰系统参数的比较好的预测，其中  $0 < N(p,T) < 1$ 。显然， $c_0$  在这里不能接近无穷大。例如，我们可以检查建议值  $c_3 = 0$ ， $c_2 = \pm 43.6$  以及  $c_1 = 8.7 \times 10^4$ ，这保证了能量固定为  $E = 10^9 \text{ a.u.}$ ，并且仍然可以对  $c_0$  进行变化。例如，通过选择  $c_0 = 3.245 \times 10^4$ ， $3.99 \times 10^4$  和  $4.696 \times 10^4$ ，我们发现超过  $N(p,T) > 99\%$ 。在这些情况下，分别在时间上分别完成 4.5、5.5 和 6.5 个周期的总体反转后，即可达到最优最终值。

## 4.1.4 集体动量状态优化的数值示例

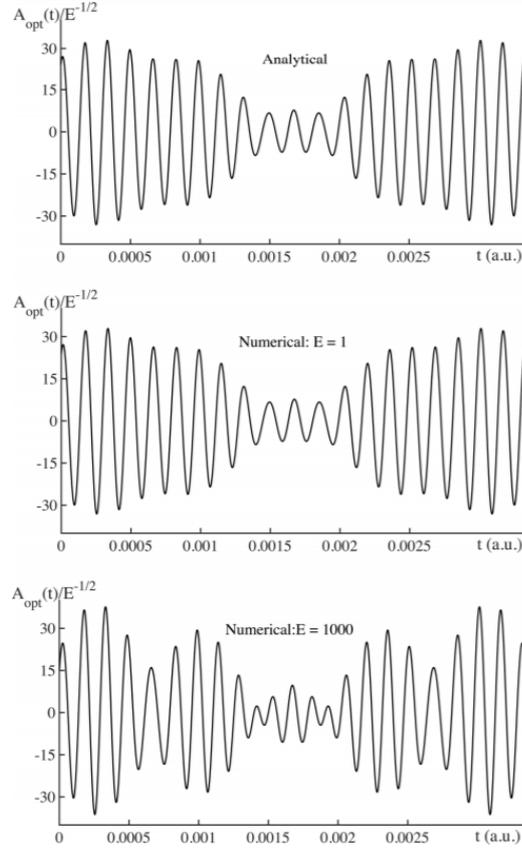


图 4-6 在总相互作用时间  $T = 20 \times 2\pi / (2c^2)$  和脉冲能量  $E$  的情况下，最优场  $A_{\text{opt}}(t)$  使动量  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 50$  和  $p_3 = 100$  a.u. 的正电子的总产额最大化。

(a) 根据解析表达式对  $E = 1$  的解析预测。

(b) 使用初始场  $A(t) = \text{const}$  和  $E = 1$ ，根据梯度上升法计算获得的全局最优场。

(c) 对于较大的场能量  $E = 1000$ ，通过计算获得的非微扰最优场。

Fig.4-6 The optimum field  $A_{\text{opt}}(t)$  that maximizes the combined total yield for positrons with momenta  $p_1=1$ ,  $p_2=50$  and  $p_3=100$  a.u. for a total interaction time  $T=20 \times 2\pi / (2c^2)$  and pulse energy  $E$ .

(a) The analytical prediction for  $E = 1$ .

(b) The computationally obtained global optimal field based on the steepest ascent method, using an initial field  $A(t) = \text{const}$ . and  $E = 1$ .

(c) The nonperturbative optimum field obtained computationally for a larger field energy  $E=1000$ .

为了进行比较,我们在图 4-6a 中给出了最优化场  $A_{\text{opt}}(t)$  的解析预测,基于三个余弦函数的线性叠加并包括能量归一化,该值固定为  $\lambda_0$ 。我们看到,由于三个系数的特定数值  $\chi_C(p_i)$ , 所得的最优化形式与三个基本的余弦函数  $A_{\text{opt}}(p_1, t)$ ,  $A_{\text{opt}}(p_2, t)$  和  $A_{\text{opt}}(p_3, t)$  明显不同。为了进行比较,我们在图 4-6b 中绘制了基于无限维优化的计算获得的最优场,这两个图是彼此无法区分的。

为了显示非微扰效应引起的校正如何影响最优产额,我们重复了数值优化,但将外场能量  $E$  增加到 1000。这导致最优化产额  $\Sigma_p N(p, T) = 1.436$ , 显然这是在非微扰机制下,因为基于微扰理论的收益率线性能量标度(见图 4-3)将预测  $\Sigma_p N(p, T) = 1.926$ 。在图 4-6c 中,我们显示了相应全局最优场  $A_{\text{opt}}(t)$ , 该场与微扰预测截然不同。

## 4.2 真空中正负电子对产生率的最优化超临界势

### 4.2.1 优化算法及数值计算实现

在这项工作中,我们根据 Dirac 哈密顿量的本征态计算了具有所需能量  $E$  的正负电子对的长时间产生率  $\Gamma(E)$ 。在一个空间维度(原子单位制)中,其形式为  $H = c \sigma_1 p + c^2 \sigma_3 + V(x)$ , 其中我们假设耦合到电荷为  $q = +1$  a.u. 的正电子,  $p$  是动量算符,  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  表示  $2 \times 2$  Pauli 矩阵。在外场近似中,真空状态与超临界外部电势的相互作用由  $V(x)$  给出。为简单起见,我们假设电势是超临界的,因此满足  $V(x \rightarrow -\infty) = V_0$ , 其中  $V_0 > 2c^2$  并且  $V(x \rightarrow \infty) = 0$ 。

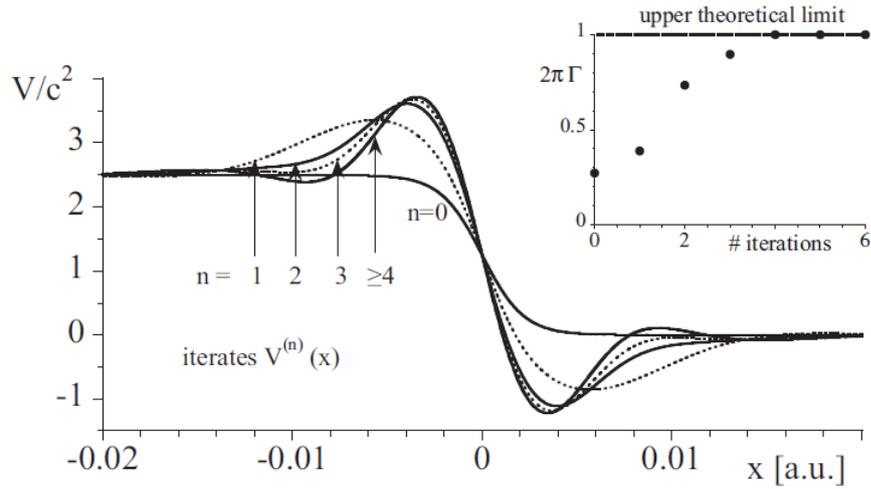


图 4-7 对于渐近势高  $V(x \rightarrow -\infty) = V_0 = 2.5c^2$  以及  $E = 1.25c^2$  的势，前五个电势  $V^{(n)}(x)$  迭代优化正负电子对产生率  $\Gamma(E)$ 。初始电势选择为  $V^{(0)}(x) = V_0 [1 - \tanh(x/w)]$ ，而  $w = 0.3/c$ ，从而导致初始值  $\Gamma^{(0)} = 0.27/(2\pi)$ 。空间轴沿 2000 个网格点离散分布，等间距  $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$ 。我们使用  $W(x) = \exp[-(x/0.01)^2]$  作为函数梯度的窗口函数。在插图中，我们显示了关联正负电子对产生率  $\Gamma^{(n)}(E)$  的单调增长，它是迭代次数  $n$  的函数。仅经过 4 次迭代，它就非常接近虚线  $\Gamma_{\text{lim}}(E) = 1/(2\pi)$  所示的理论上允许的最大值。

Fig.4-7 The first five potentials  $V^{(n)}(x)$  to optimize iteratively the pair creation rate  $\Gamma(E)$  for potentials with asymptotic potential height  $V(x \rightarrow -\infty) = V_0 = 2.5c^2$  and  $E = 1.25c^2$ . The initial potential was chosen  $V^{(0)}(x) = V_0 [1 - \tanh(x/w)]$  with  $w = 0.3/c$ , leading to a starting value of  $\Gamma^{(0)} = 0.27/(2\pi)$ . The spatial axis with discretized along 2000 grid points with an equidistant spacing  $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$ . As a window function for the functional gradient we used  $W(x) = \exp[-(x/0.01)^2]$ . In the inset we display the monotonic growth of the associated pair creation rate  $\Gamma^{(n)}(E)$  as a function of the number of iterations  $n$ . After only 4 iterations it becomes very close to its upper theoretically permitted value shown by the dashed line  $\Gamma_{\text{lim}}(E) = 1/(2\pi)$ .

现在让我们说明这种迭代方案的快速收敛。我们从对  $V(x) = V_0[1 - \tanh(x/w)]/2$  给出的电势的初始猜测开始，其中幅度  $V_0 = 2.5c^2$ ，空间开启宽度  $w = 0.3/c$ 。在这种情况下，还存在产生率的解析表达式[29]，可以预测能量  $E = 1.25 c^2$  的  $\Gamma = 0.272/(2\pi)$ ，恰好在允许的能量范围的中间( $c^2 < E < c^2 - V_0$ )产生的正电子，有时也称为 Klein 窗口。空间轴在  $x = -0.05$  a.u.和  $x = 0.05$  a.u.之间离散化为  $N = 2000$  个网格点，然后，算法

在这些点的每一个处确定函数导数 $\delta\Gamma(E)/\delta V(x)$ 。然后将该导数乘以高斯窗口函数，这里由 $W(x) = \exp[-(x/0.01)^2]$ 给出。在图 4-7 中，我们显示了初始 Sauter 势和前四个迭代电势 $V^{(n)}(x)$ 的相应序列。对于 $n \geq 4$ ，空间轮廓收敛。在图的插图中，我们显示了产生率 $\Gamma^{(n)}$ 的增长顺序。与 $V^{(n)}(x)$ 的数据一致，我们看到仅约 4 次迭代，产生率从 $\Gamma = 0.272/(2\pi)$ 增长到接近 $0.9996/(2\pi)$ ，其非常接近 $\Gamma_{\text{lim}}$ 。

#### 4.2.2 最优化场的数值计算结果

为了检查其它正电子能量，我们在图 4-8a 中显示了三个电势，分别为 $E = 1.05c^2$ 、 $1.25c^2$  和  $1.45c^2$  优化，并且在图 4-8b 中对应给出产生率的能量依赖性。非常明显的是，针对 $1.25c^2$  优化的电势不仅导致产生率接近于 $E = 1.25c^2$  的理论上限 $\Gamma_{\text{lim}}$ ，而且还导致了针对其它多种能量的较大产生率。实际上，对于所有能量 $1.04 c^2 < E < 1.46 c^2$ （几乎是整个 Klein 区间），我们发现产生率 $\Gamma(E)$ 保持 $0.95/(2\pi)$ 以上。因此针对 $1.25c^2$  优化的电势也可以优化总产生率 $\gamma$ 。

$E = 1.05c^2$  和  $E = 1.45c^2$  的数据比较表明， $V_{\text{opt}}(E)$ 以及相应的产生率 $\Gamma(E)$ 具有特别但是在预期之内的对称性。这与哈密顿量的电子和正电子公式之间的电荷共轭对称性有关。给定正电子能量  $E$  的任何势能  $V(x)$ 都会导致正负电子对产生率与其配对电势 $V_p(x) = -V(-x) + V_0$ （能量 $E_p = V_0 - E$ ）的正负电子对产生率完全相同。结果就是，产生率也具有对称性 $\Gamma_p(E) = \Gamma(V_0 - E)$ ，如图 4-8b 中的点划线和虚线所示。从现在起我们可以将我们的分析限制在较小范围 $V_0/2 < E < V_0 - c^2$ 的正电子能量上，而不会失去任何一般性。

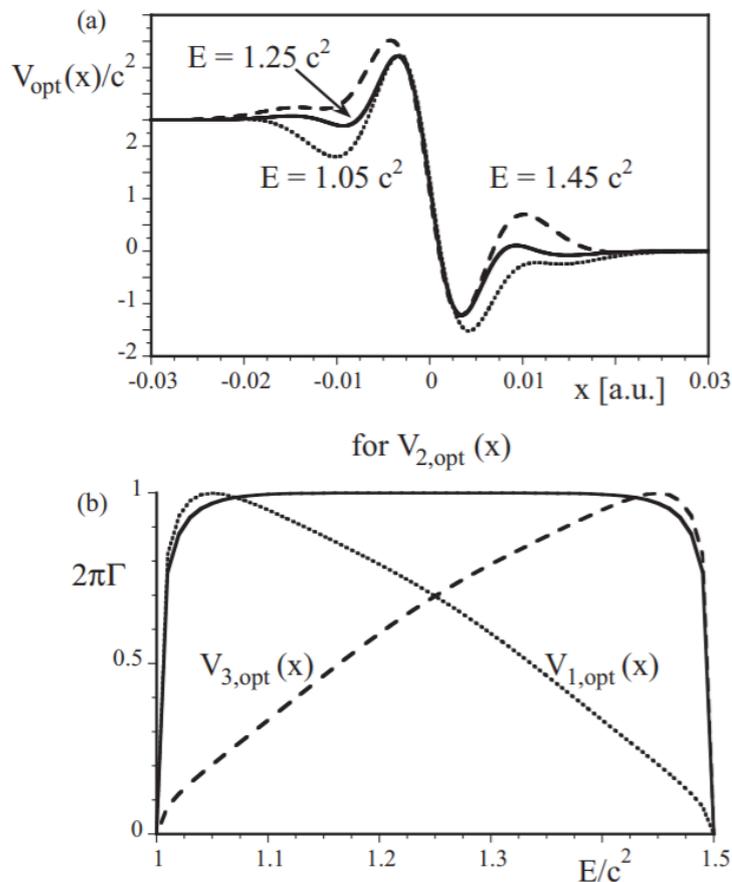


图 4-8 (a)最优电势  $V_{\text{opt}}(x)$ 的空间分布图，对于  $V_0 = 2.5c^2$ 的最终能量  $E = 1.05 c^2$ 、 $1.25 c^2$ 和  $1.45 c^2$ 的正电子，可优化其正负电子对产生率。(b)与(a)中所示的三个最优电势  $V_{\text{opt}}(x)$ 相关的正负电子对产生率 $\Gamma(E)$ 的总能量相关性。

Fig.4-8 (a) The spatial profile of the optimum potential  $V_{\text{opt}}(x)$  that optimize the pair creation rate for positrons with final energies  $E = 1.05c^2$ ,  $1.25c^2$  and  $1.45c^2$  for  $V_0 = 2.5$ . (b) The total energy dependence of the pair creation rate  $\Gamma(E)$  associated with the three optimal potentials  $V_{\text{opt}}(x)$  shown in (a).

## 4.2.3 产额放大机制的解释和建模

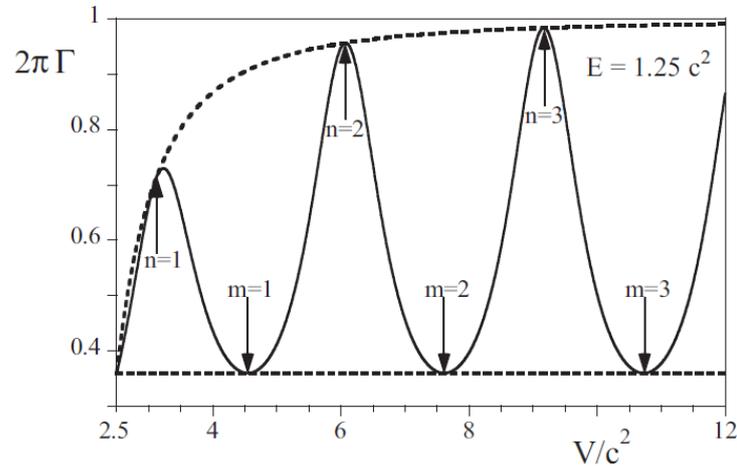


图 4-9 对于  $E = 1.25c^2$  和对于  $d=1/c$ , 与两阶梯电势模型  $V(x, V, d)$  相关的正负电子对产生率  $\Gamma(E)$  作为“凸点”强度  $V$  的函数。六个箭头指示根据谐振条件的  $V_{\max}$  和  $V_{\min}$  的预测值。根据解析解得到的两条虚线是包络线。

Fig.4-9 The pair creation rate  $\Gamma(E)$  associated with the model two-step potential  $V(x,V,d)$  as a function of the "bump" strength  $V$  for  $E = 1.25c^2$  and for  $d = 1/c$ . The six arrows indicate the predicted values of  $V_{\max}$  and  $V_{\min}$  according to the resonance condition. The two dashed lines are the envelope solutions according to analytical solutions.

在图 4-9 中, 我们展示了当  $V_0 = 2.5c^2$ ,  $d = 1/c$  和  $E = 1.25c^2$  时,  $\Gamma(E)$  和“凸点”强度  $V$  的函数关系图。此电势  $V(x,V, d)$  首先导致的是产生率的意外结果。例如,  $V = 3.23c^2$  的比率等于  $\Gamma(E) = 0.73/(2\pi)$ 。对于两个单阶梯电势, 高度  $V_0 = 2.5c^2$  [导致  $\Gamma(E) = 0.36/(2\pi)$ ], 甚至  $V_0 = 3.23c^2$  [导致  $\Gamma(E) = 0.62/(2\pi)$ ], 该值显然超过了两个单步电势的透射率。这意味着, 对于  $-d < x < 0$ , 幅度  $V = 3.23c^2$  的额外(有限)凸点, 对于  $x < -d, V_0$  可以显著放大正负电子对产生率。这也与图 4-9b 所示的一般数据完全一致。同样非常值得注意的是, 透射率不会随  $V$  稳定增加, 实际上, 对于  $E = 1.25c^2$  和  $d =$

$1/c$ , 还有其他有限最优值接近  $V_1 = 6.1 c^2, 9.2 c^2, 12.3 c^2, \dots$ 。这表明共振机制可能是放大的原因。 $x = -d$  和  $x = 0$  处两个边界之间的空间区域可以充当某种“腔”, 其中自然状态下的特定波长满足  $(n-1/2) \lambda_n = 2d$  (对于  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 原则上可以引起共振。

#### 4.2.4 基于无限维最优势场 $V_{\text{opt}}(x)$

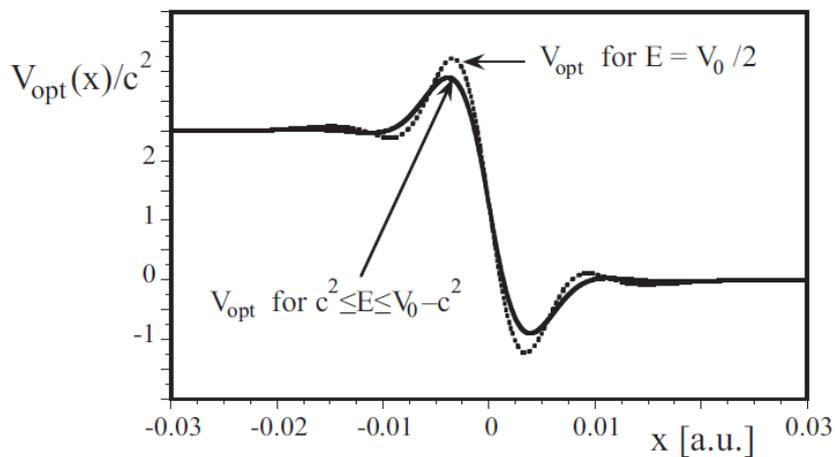


图 4-10 对于在  $c^2 < E < V_0 - c^2$  范围内的所有能量 ( $V_0 = 2.5c^2$ ), 使总正负电子对产生率最大化的最优电势  $V_{\text{opt}}$ 。为了进行比较, 我们用虚线重复了相应的电势, 该电势对应的是能量  $E = 1.25 c^2$  使得产生率  $\Gamma(E)$  最优化的势。

Fig.4-10 The optimal potential  $V_{\text{opt}}$  that maximizes the total electron-positron pair creation rate  $\gamma = \int dE \Gamma(E)$  for all energies in the range  $c^2 < E < V_0 - c^2$ , with  $V_0 = 2.5c^2$ . For comparison, we repeat by the dashed line the corresponding potential that optimizes the rate  $\Gamma(E)$  for the specific energy  $E = 1.25 c^2$ .

在图 4-10 中, 我们给出了  $V_0 = 2.5c^2$  时的最优电势  $V_{\text{opt}}(x)$ 。它显示了与相应电势的相似性, 该电势使单个能量  $E = 1.25c^2$  的正负电子对产生率最大化,  $E$  恰好在 Klein 范围的一半。正如我们在图 4-8a 中已经注意到的那样, 这一发现并不是完全在意料之外的, 这已经使电势  $V_{\text{opt}}(x)$  的幅度和空间形状之间有了一定的共性, 从而优化了

Klein 范围内三种相当不同的能量的产生率。这一发现也与最近研究的集体响应同时优化叠加原理(SPSO)完全一致[79]。在这种情况下,考虑一组独立系统的动力学,同时将它们耦合到同一时间相关的外力上。使用优化控制理论,表明可以同时使这些系统的集体响应最大化的该力的最有效的时间脉冲形状可以与分别优化每个系统的单个力相关。从这个意义上说,本系统从定性上证实了最初只为时间系统导出的 SPSO 可能也可以推广到空间优化。

### 4.3 总结与展望

对于含时外场的相关优化工作,我们首次说明了如何将无限维最优化方案应用于量子场论问题,该问题使强场诱导的正负电子对产生过程的最终正负电子对产额最大化。在扰动极限中应用最优控制理论,我们可以导出具有给定单个动量以及整组动量的正电子最优场的时间脉冲形状的解析表达式。为了扫描尽可能大的可允许外场  $A(t)$  的范围,我们尝试通过选择简单约束  $E = \int dt A(t)^2$  [或者  $E = \int dt (dA/dt)^2$ ]。由于这些较大的自由度,获得的最优场并不一定会在  $t=0$  或  $t=T$  时消失,这可以期望在实验室中实现可能的外部物理场。为了检查那些在边界处消失的场,可以使用新的 Lagrange 函数引入其他约束,或者可以通过向目标函数引入惩罚函数来引入约束。

与先前对空间均匀外场的研究相反,在空间均匀外场中,必须将场的振幅或能量限制作为外部约束,以避免具有无限参数的不良外场。本研究首次揭示了最大的理论上可行的给定最终正电子能量(与等于 1 的透射系数相关)的正负电子对产生率实际上可以通过有限的场来实现,因此可能在技术上得以实现。这一令人鼓舞的发现无疑引起了人们的希望,即类似的有限时空参数可以导致最优的正负电子对产生率。

虽然我们仍处于理论理解的初始阶段,但我们希望当前的研究能够激发进一步的深入研究,最终可以对实验起到指导性的作用。

## 第五章 正负电子对产生的时空自由度的共生和非共生优化

由于场致量子真空状态的击穿与正负电子对的产生有关,可能由多光子跃迁或隧穿过程独立引起。第一种机制通常是由外场随时间变化引起的,而在第二种机制(类似于 Schwinger)中,是由于空间相关的静电场具有超临界强度而发生的。本章中我们的研究目标是构造电磁场的最优时空分布图,可以最大程度地产生正负电子对。同时优化两个参数的时空特征场表明,最优的两场结构可以非常类似于从两个分别针对空间和时间领域进行独立的优化。

### 5.1 引言

近年来数十至百拍瓦超强激光技术的迅速发展,使得利用极强外场探测量子电动力学真空态不稳定性的研究引起了广泛的关注。理论研究表明有两种本质上不同的真空击穿机制可以从真空中产生正负电子对。第一种机制要求该场(可以是静态的)的强度非常大,可以通过能量转移的狄拉克状态之间的隧穿过程来实现;第二种机制要求该场与时间相关,且场的频率足够高,从而可以引发单光子或多光子过程。

国际上很多研究组已开始开发相关的优化计算方法,以获得对外场的参数集进行优化,该参数集可以使相互作用后产生的正负电子对产额最大。但是,大多数这些工作仅限于研究那些在空间或时间上恒定的场。由于对同时具有空间和时间依赖性的外场模拟计算难度很大,因此这种限制是前期研究得以顺利完成所必须的。

对于空间不均匀但不含时的外场,可以方便地使用 Hund 定则[43,84,85]来定义和计算稳态真空正负电子产生率,该规则允许我们将量子场理论问题转化为量子力学散射问题[86]。这里的总正负电子对产生率(或具有给定能量范围的正电子相关联的产生率)可以由量子力学透射系数来计算。基于无穷维优化的最新工作表明,对于外部超临界电势  $V(x)$ , 存在最优的空间分布。与人们可能期望的相反,这种针对电势的最优空间分布并非突然变化,即  $V(x) \sim (1-x/|x|)$  (其对应的电场实际上是无限的),

但是最优电势  $V(x)$  呈现非平凡且非单调的准振荡形状。

对于随时间不均匀的外场（即含时外场），Kohlfürst 和 Hebenstreit 以及 F. Gourdeau 等人做出了开创性的工作。他们用量子 Vlasov 方程[87,88,89,90,91,92]获得了最终的正电子产生率的最优解。但是，如果外场同时还具有空间依赖性，则无法应用这种简便的方法。由于处理具有空间和时间非均匀性的场综合作用的内在困难，很少有对时空自由度同时优化的系统性研究。

目前对于这类研究，连最基本的问题都还没有得到解决。如果可以独立于两个单独的优化结果而近似地同时得到时空和空间相关外场的优化叠加，那将会对这类研究提供非常有益的帮助。如果可能，这将对应于两个自由度的非共生(non-symbiotic)优化。这种独立优化的可能性肯定会为简化将来的计算以构造最优的时空场结构带来希望。如果发现优化是完全共生(symbiotic)的；即两个自由度的同时作用可能导致新的最优场结构，这就不能从单独两个场的独立优化中推论出共生优化的结果。虽然发现这种共生性质会使进一步的优化研究变得更加复杂，但从物理角度来看，它可能也会更加引人入胜，因为这将探索由于时间和空间的相互作用诱发的真空正负电子对产生的新现象打开大门。

本章的主要内容如下：我们介绍了实现同时具有最优时间和空间外场结构的一些系统步骤，以构建适合于正负电子对产生的最优电磁场结构。在第二部分中，我们介绍了一种定量方法，可以对通用系统的共生程度进行分类。在第三部分中，我们说明了用于简单模型系统的度量。在第四部分和第五部分中，我们检查了由场引起的真空正负电子对产生，并表明（取决于场结构）最优值可以是共生的，也可以是非共生的。第六部分，我们指明了尚未解决的问题，并对未来研究做出了展望。

## 5.2 共生与非共生优化

我们用  $F(t,s)$  表示目标函数，该函数将依赖于时间和空间的外部力映射为单个数  $F$ ，这是需要最大化的数。在下面介绍性的第 3 节中， $F$  将表示简单受驱振子的最终位移，而在主要的第 4 和第 5 节中， $F$  是在与电场相互作用后生成的正负电子对的最

终数目。需要确定表征施加力场的时间和空间特性的两个参数  $t$  和  $s$  以最大化  $F$ 。为了量化非共生和共生优化之间的主要差异，我们可以首先构造围绕目标函数  $F(t,s)$  局部或全局最大值的泰勒展开，其中最大值用对  $\{t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}\}$  表示。当我们检查导致消失的一阶导数的临界点  $\partial_t F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) = \partial_s F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) = 0$  时， $F$  的泰勒展开式的最低阶项为

$$F(t,s) = F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) + \partial_s \partial_t F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) (t-t_{\text{opt}})(s-s_{\text{opt}}) + \partial_t^2 F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) (t-t_{\text{opt}})^2/2 + \partial_s^2 F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) (s-s_{\text{opt}})^2/2 + \dots \quad (5-1)$$

在此我们排除了一组相当特殊的函数的情况，其中临界点附近的二阶导数消失了。对于此集合，正如我们在这项工作中所考虑的那样，极值周围的等高线是椭圆。对于非共生最大值的特殊情况，最大值以独立的方式取决于参数  $t_{\text{opt}}$  和  $s_{\text{opt}}$ 。这意味着如果  $t$  偏离其最优值  $t = t_{\text{opt}}$  略有变化，则  $s_{\text{opt}}$  的相应数值将保持  $F(t,s)$  在此处最大程度不应发生变化，反之亦然。在这种情况下，这种独立性体现在混合导数  $\partial_t \partial_s F(s_{\text{opt}}, t_{\text{opt}})$  上。

因此，将  $\partial_t \partial_s F(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}})$  的大小与共生程度相关联似乎是很自然的。但是，由于此导数通常会携带单位，因此其数值不是通用的，因为它会在可能的（和任意的）空间和时间自由度 ( $t \rightarrow \lambda t$  和  $s \rightarrow \mu s$ ) 的乘积缩放下变化。为了弥补这种可能性，我们建议在这项工作中要考虑以下的无量纲指数  $h$

$$h(t_{\text{opt}}, s_{\text{opt}}) \equiv (\partial_t \partial_s F)^2 / (\partial_t^2 F \partial_s^2 F) \quad (5-2)$$

作为量化共生关系的一种可能措施。指数与相应的  $2 \times 2$  Hessian 矩阵的行列式密切相关，该行列式描述了局部曲率，并允许我们将临界点分类为最大，最小或鞍点。例如， $h < 1$  对应于正的 Hessian 行列式。如果  $h$  为零，并且两个自由度似乎彼此独立起作用，则我们将其称为最优非共生关系。作为附带问题，我们注意到，对于最大的  $F$ ， $h$  通常被约束在区间  $0 \leq h \leq 1$  内。

虽然可以根据计算数据  $F(t,s)$  的最大值确定  $h$  的数值，但共生的程度也直接在时空分布的空间  $F(t,s)$  的等高线上通过参数  $t$  和  $s$  表现出来。在这里，相应的椭圆围绕最大值的对齐与  $h$  有关。可以看出，椭圆的半长轴与  $t$  轴或  $s$  轴之间的对准角由  $\tan(2\alpha) = 2 \partial_t \partial_s F / (\partial_s^2 F - \partial_t^2 F)$  给出。这意味着非共生最大值 ( $h = 0$ ) 可以通过在  $(t,s)$  空间中未旋转

的椭圆轻松识别。

下面要解决的关键问题之一是关于通过对两个单独子系统的动力学进行检查(通常来说容易得多)来获得最优对  $\{t_{opt}, s_{opt}\}$  的参数范围的定量指导的可能性。第一个系统受到空间依赖外场的激励, 仅导致可能的  $s_{opt}$  近似值, 而对纯时间驱动系统的优化可以提供  $t_{opt}$  的预测值。我们将从这两个独立的优化获得的参数对命名为“i-points”, 并用  $\{t_{opt}^{\{1,0\}}, s_{opt}^{\{0,1\}}\}$  表示它们, 在第 5.3 节中会对这一点详细叙述。

### 5.3 谐振子作为共生与非共生优化的原型

在本节中, 我们将说明关于自由经典粒子的近似解析模型系统的共生和非共生最优值的性质, 其中外力的空间和时间自由度由谐振子的空间尺度和单色驱动力的时间尺度提供。如下将显示的, 在这个特定的系统中, 全局最优是非共生的, 而第一个局部最优是共生的。我们将说明围绕这两个最优点的等高线图的不同含义, 并检查相应 i 点的质量, 以预测由两个力驱动的系统真实最优值。

#### 5.3.1 同时优化及 Hessian 指数的引入

为了说明在时间和空间控制参数空间中共生最大值和非共生最大值的不同特征, 我们在这里研究最简单的模型系统, 单位质量的驱动谐振子, Hamilton 函数:

$$H = P^2/2 + B \Omega^2 X^2/2 - A \sin(\omega t) X \quad (5-3)$$

在这里, 我们使用质量等于 1 的原子单位制。选择两个参数对  $\{A, B\} = \{1,0\}$  或  $\{0,1\}$  使我们可以分别检查时间和空间优化, 而符号  $\{1,1\}$  对应于完全耦合的动力学系统。让我们假设目标是找到最优控制对  $\{\omega_{opt}, \Omega_{opt}\}$ , 使得对于给定的初始条件  $X(0) = 0$  和  $dX/dt(0) = V$ , 最终平衡点的位移交互时间  $X(T)$  最大。由于  $\{1,1\}$  系统的简单性, 我们可以解析求解相应的 Hamilton 方程组, 并获得最终时间 T 时的位移:

$$X(\omega, \Omega) = \{\Omega \sin(\omega T) - [\omega - V(\omega^2 - \Omega^2)] \sin(\Omega T)\} \Omega^{-1} (\Omega^2 - \omega^2)^{-1} \quad (5-4)$$

但是任意临界点的必要条件(即  $\partial X/\partial \omega = \partial X/\partial \Omega = 0$ ) 是一组先验耦合方程, 因此需要

对此方程组进行数值求解。

为了首先获得定性图像，我们在图 5-1 中绘制了  $X(\omega, \Omega)$  的相应表面图，该图是两个控制参数  $\omega$  和  $\Omega$  的函数，以及相应的等高线图。由于坐标对  $(\omega, \Omega)$  中的两个参数彼此独立，因此我们在图中选择了两个坐标轴的排列方式，类似于通常的矩阵表示法，其中第一个分量是垂直方位（列），第二个分量表示水平方位（行）矩阵。

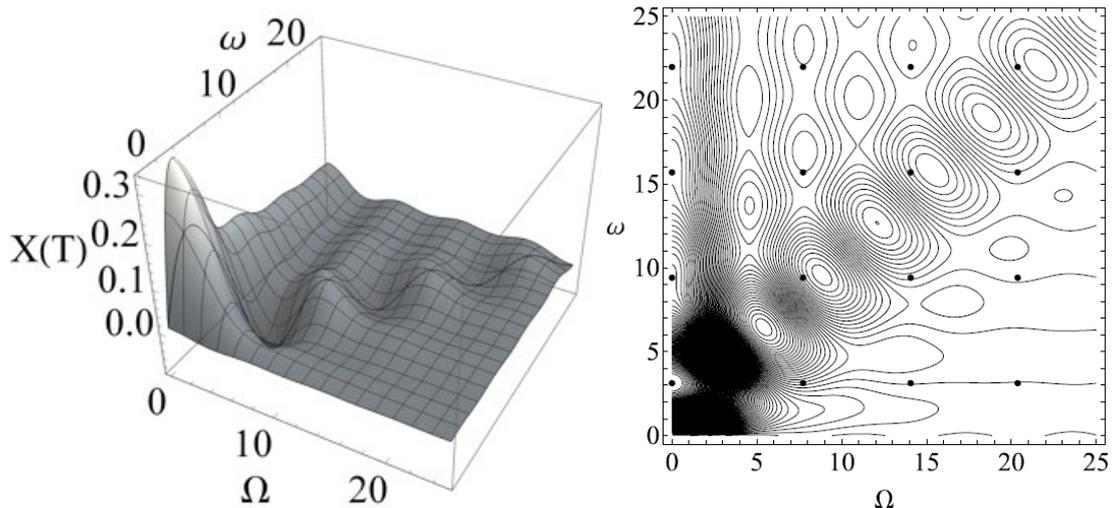


图 5-1（左）对于  $T = 1$  和  $V = 0.01$  的最终位移  $X(\omega, \Omega)$  的表面图。为了提高可读性，我们还将对角线  $\Omega = \omega$  作为参考线。（右）相应的等高线图。十六个黑点是前 16 个  $i$  点的位置，如第 5.3.2 和 5.3.3 节所述。

Fig.5-1 (left) Surface plot of the final displacement  $X(\omega, \Omega)$  for  $T = 1$  and  $V = 0.01$ . For better readability we have also included as a reference line the diagonal  $\Omega = \omega$  (right). The corresponding contour lines. The sixteen black dots are the locations of the first 16  $i$ -points, discussed in Sections 5.3.2 and 5.3.3.

我们看到，对  $\{\omega_{\text{opt}}, \Omega_{\text{opt}}\} = \{\pi/T, 0\}$  出现了全局最大值。这套控制参数的意义在于：选择  $\Omega_{\text{opt}} = 0$  完全消除了空间依赖外力的影响，由于空间依赖外力的约束特性，它将抵抗任何使得位移  $X(T)$  增加的趋势。最优时间控制参数  $\omega_{\text{opt}} = \pi/T$  的数值也是可以预期的，因为使用此特定选择，粒子可以经历振荡场的第一个完整半周期，因此可以在力方向将自身反转 ( $t > T/2$ ) 之前，最大程度地将粒子加速到位移更大的位置。全局最大值的 Hessian 指数  $h$  在此正好为零，这与半轴与  $t$  坐标轴和  $s$  坐标轴之间观察到的消失角一致。因此，全局最大值在该系统中是完全非共生的。另一方面，第一个局部

最大值出现在  $\{\omega_{\text{opt}}, \Omega_{\text{opt}}\} = \{9.560, 8.816\}$ 。其 Hessian 指数确定为  $h = 0.222$ ，并且（对于归一化轴和单位长宽比），半长轴（或短轴）的相应角度为  $\alpha = -42.9^\circ$ 。因此，第一个局部最大值恰好是共生的，这与等高线图中旋转的椭圆一致。

### 5.3.2 通过独立优化获得的数学上的 i 点

当然，关键的问题是，是否可以通过独立的（对于更复杂的系统，在计算上更加容易）计算来获得只有空间依赖外场或含时外场作用的地方的  $\{\omega_{\text{opt}}, \Omega_{\text{opt}}\}$  的数值位置预测值。正如我们在引言中讨论的那样，真空产生正负电子对的示例表明，当仅通过时间力场或空间力场产生粒子时，计算分析要容易得多。对于（唯一的）含时系统  $\{A, B\} = \{1, 0\}$ ，由哈密顿量  $H = P^2/2 - \sin(\omega t) X$  给出，最终位移为  $X(\omega, 0) = T/\omega + V T - (1/\omega^2) \sin(\omega T)$ ，与等式(3-2)给出的  $X(\omega, \Omega \rightarrow 0)$  的极限一致。由于初始速度  $V$  仅通过加法项进入解，因此它不会影响最大值的位置。对于  $T = 1$ ， $X(T)$  的前四个最大值出现在  $\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}} = 3.142, 9.425, 15.708$  和  $21.81$  [与  $X(\omega_{\text{opt}}, 0)$  的幅度减小相关]。

类似地，只具有空间依赖性的系统（对应于  $\{A, B\} = \{0, 1\}$ ）由  $H = P^2/2 + \Omega^2 X^2/2$  给出，从而得出  $X(0, \Omega) = V \sin(\Omega T)/\Omega$ 。最优空间尺度的值可以在数值上找到，例如  $\Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}} = 0, 7.725, 14.07, 20.371$ ，而且这些值不取决于粒子的初始速度  $V$ 。

即使  $\{1, 0\}$  和  $\{0, 1\}$  系统是完全不同的物理系统，没有任何共同点，我们也可以（从数学上来说）将它们的最优组合成对，用  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}}\}$  来表示。更具体地说，如果我们关注每个集合的前四个最优值，则会获得总共 16 个“坐标对”，分别由  $i_{m,n} \equiv \{\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}}(m), \Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}}(n)\}$  来表示，其中  $m=1,2,3,4$ ， $n=1,2,3,4$ 。为了反映每对中第一个和第二个坐标的完全独立性，我们将它们表示为“独立点”或  $i$  点。我们在这里强调，任何对  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}}\}$  都不能与任何单个物理系统相关联。

在上面图 5-1 所示的物理系统（对于  $\{A = 1, B = 1\}$ ）的等高线图中，我们添加了这 16 个  $i$  点  $i_{m,n}$  的位置。非常明显的是，我们发现其中一些 ( $i_{m,n}$ ,  $n=1$ ) 与真实最优位置完全匹配，而另一些 ( $i_{m,n}$ ,  $m > n$ ) 似乎非常接近真实最优位置。由于子系统  $\{A=1, B=0\}$  定义为与整个系统  $\{A = 1, B = 1\}$  在  $\Omega = 0$  的情况下相同，因此可以预期  $i$  点  $i_{m,n}$  与  $n =$

1 的精确匹配。需要注意的是，所有这四个最大值的 Hessian 指数  $h = 0$  也都消失了。由于一些最优值与  $\Omega = 0$  相关，因此与  $i$  点的相应精确匹配是显而易见的。

另一方面，非常值得注意的是，其他  $i$  点显然也可以用作找到真实最优值的实际位置的良好指南。具体地讲，作为定性示例，三个  $i$  点  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}}\}$  由  $i_{2,2} = \{9.425, 7.725\}$ ,  $i_{3,3} = \{15.71, 14.07\}$  和  $i_{4,4} = \{21.81, 20.371\}$  在真实最优位置的附近，位于  $\{9.560, 8.816\}$ ,  $\{15.808, 15.3125\}$  和  $\{22.0747, 21.6859\}$ 。

### 5.3.3 从 $i$ 点出发反向追踪到真正的最优解

正如我们在上面看到的那样，数值计算数据似乎表明， $i$  点集确实可以作为定性指导，以预测完全由时空驱动的  $\{A = 1, B = 1\}$  系统的位置。然而，为了排除这种定性匹配纯粹是偶然的可能性，并在真实的最优值和相应的数学  $i$  点之间建立明确的一对一联系，以期待在它们之间建立某种直接联系。

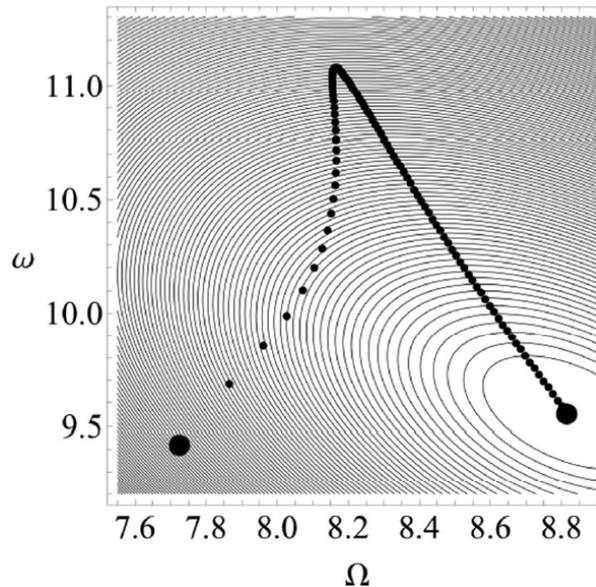


图 5-2  $i_{2,2} = \{\omega, \Omega\} = \{9.425, 7.725\}$  与  $\{A = 1, B = 1\}$  时空驱动系统的真实最优值  $\{9.560, 8.816\}$  之间的连接途径。将该路径线性化为  $\varepsilon$  的函数，即  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,\varepsilon\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{\varepsilon,1\}}\}$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 。

Fig.5-2 The connection pathway between the  $i$ -point  $i_{2,2} = \{\omega, \Omega\} = \{9.425, 7.725\}$  and the true optimum for the  $\{A=1, B=1\}$  space-time forced system given by  $\{9.560, 8.816\}$ . The pathway was linearly parameterized as a function of  $\varepsilon$  as  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,\varepsilon\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{\varepsilon,1\}}\}$  with  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

这项工作并不是很直观明了，因为  $i$  点仅仅来源于数学构造，其坐标是从两个完全独立的系统  $\{A = 1, B = 0\}$  和  $\{A = 0, B = 1\}$  人工拼接在一起的。但是，如果我们引入一个用  $\varepsilon$  表示的运行常数，其值从  $\varepsilon = 0$  增至  $\varepsilon = 1$ ，则可以检查所得到的连续路径，即相应的  $i$  点坐标  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,\varepsilon\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{\varepsilon,1\}}\}$  与  $\varepsilon$  的函数关系。更具体地说，对于系统  $\{A = 1, B = \varepsilon\}$ ，我们将获得满足  $\partial X^{\{1,\varepsilon\}}/\partial \omega = 0$  的对  $\{\omega, \Omega\}$  的等式，对于系统  $\{A = \varepsilon, B = 1\}$ ，我们获得第二个方程  $\partial X^{\{\varepsilon,1\}}/\partial \Omega = 0$ 。如果随后需要一起（人工）求解这两个方程，则可以获得相应的  $i$  点，分别由  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,\varepsilon\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{\varepsilon,1\}}\}$  表示。尽管我们再次强调，对于  $\varepsilon$  的每个值（不等于 1）， $i$  点的序列不对应于任何单个物理系统，但是对于  $\varepsilon = 1$ ，它们确实描述了系统  $\{A = 1, B = 1\}$ 。换句话说，通过这种方式，我们设法在  $i$  点和感兴趣的物理系统之间建立了连续的连接。当然，最重要的问题是找出每个  $i$  点可以通过此特定方案链接到哪个最大值。

我们在数值上研究了这个问题，发现特定点  $i_{m,1}$  始终不依赖于  $\varepsilon$ ，而其他点（对于  $m > n$ ）的确发展到了最接近的真实最大值。这意味着确实可以明确地将某些  $i$  点唯一地连接到它们的“父”值（由真实最大值的坐标对决定）。作为附带的问题，我们应该提到，这些路径通常不是直线，有时甚至会先从真正的最大值移开，然后再返回。

实际上，路径的细节确实取决于两个系数  $A$  和  $B$  由  $\varepsilon$  参数化的方式。但是，我们发现，唯一且参数化路径不同的端点（对于  $\varepsilon = 1$ ）始终移动到完全相同的位置。在图 5-2 中，我们显示了这些连接路径的示例。它显示了  $i$  点  $i_{2,2}$ （由  $\{9.425, 7.725\}$  给出）对于  $\{A = 1, B = \varepsilon\}$  和  $\{A = \varepsilon, B = 1\}$  给出的最简单的（线性）参数化，如何演变为真正的最优解  $\{9.560, 8.816\}$ 。

### 5.3.4 无法追溯到真实最优值的孤立 $i$ 点

如果我们检查图 5-1 中  $\omega = \Omega$  对角线以下（即  $\omega < \Omega$ ）的  $i$  点，我们会发现每个  $i$  点  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{0,1\}}\}$  与其对应的父参数（由真正的最优解  $\{\omega_{\text{opt}}^{\{1,1\}}, \Omega_{\text{opt}}^{\{1,1\}}\}$  给出）之间的关联不再明显，有时这种关联甚至是不可能呈现的。我们将在下面说明一些  $i$  点

不再可以追溯到任何最优点。我们将把这些特定的  $i$  点表示为“孤儿” ("orphan")  $i$  点，这些点在寻找真正的最优值方面没有什么用。

作为  $i$  点如何成为孤儿点以及这种转变如何在真实最优的快速上升的 Hessian 指数中体现的具体说明，我们在此作为一个具体示例，考察“坐标”为  $i_{2,3} = \{9.425, 14.07\}$  的  $i$  点的情况。即使附近存在  $V = 0.1$  的最大值（非常浅）（参见图 5-1），事实证明该点也不是该特定  $i$  点的父最大值。如上所述，与真实最优位置相比，这两个坐标与初始速度  $V$  无关。但是，真实最优值的存在及其位置确实取决于速度。 $V = 0.01$  的等高线图（见图 5-1）表明，似乎没有最优值可以轻松分配给  $i_{2,3}$ 。事实证明，对于  $V = 0.01$ ，实际上没有关联的最优值，因此  $i_{2,3}$  是孤儿点的一个示例。

为了证明  $i_{2,3}$  的这一特性，我们表明对于  $V > 0.0903$ ，可以实际恢复相应的最大值。使用第 5.3.3 节中讨论的  $V > 0.0903$  的回溯技术，可以构建从  $i_{2,3}$  到最大值的直接路径。例如，对于  $V = 0.12$ ，此最大值位于  $\{7.84, 13.90\}$ 。在图 5-3 中，我们以图形方式说明了如果速度降低到  $V = 0.0903$  以下，最大值实际上如何消失。如对于  $V = 0.12$  的  $X(\omega, \Omega)$  的等高线图所示，在最大值在  $\{7.84, 13.90\}$  的紧邻处，也有一个以  $\{8.02, 12.59\}$  为中心的鞍点。随着速度降低，这两个临界点彼此接近，结果是在  $V = 0.0903$  时，这两个临界点匹配，而鞍点则消除了最大值。同时，我们的  $i$  点  $i_{2,3}$  成为孤立的，因为它不再可以追溯到物理系统的任何（父）最优值。在图 5-3b 中还描绘了  $\{\omega, \Omega\}$  平面中具有减小的  $V$  的两个临界点的“轨道”。与 Hessian 索引的定义一致， $h$  也从基本上为零（对于  $V > 0.1$ ）增加到  $h = 1$ （对于  $V < 0.0903$ ），而这是鞍点的特征。在图 3a 中，我们绘制了  $h$  随速度  $V$  减小而快速上升的曲线图。

作为附带问题，值得注意的一点是，该鞍点具有异常的非对称特征。最终位移  $X(T)$  沿  $\omega$  的正方向和负方向以及  $\Omega$  的正方向减小，但仅沿负  $\Omega$  方向增大。对于更低的速度  $V < 0.088$ ，该鞍点甚至不再存在，随着速度的降低，完成了从最初的两个临界点到最终的临界点的过渡。

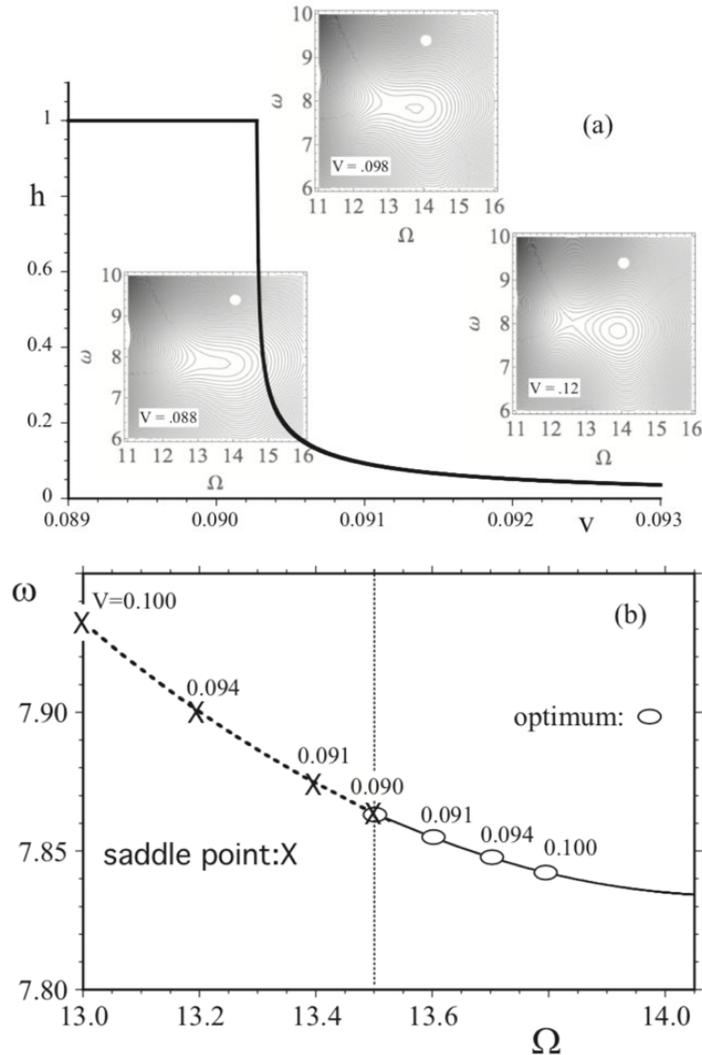


图 5-3 随着初始速度  $V$  的降低，系统的最优性消失。(a)Hessian 指数  $h$  是从最大值 ( $h < 1$ ) 到鞍点 ( $h = 1$ ) 随  $V$  变化的指标。这三个插图显示了三个不同速度值的  $X(\omega, \Omega)$  对应的等高线图。作为参考，白点是  $i$  点， $i_{2,3} = \{9.425, 14.07\}$ ，其坐标与速度无关。(b)椭圆中心和鞍点在  $\{\omega, \Omega\}$  平面上的轨迹，其速度  $V$  逐渐减小。

Fig.5-3 The disappearance of optima for the system with decreasing initial velocity  $V$ . (a) The Hessian index  $h$  as an indicator of the transition from a maximum ( $h < 1$ ) to a saddle point ( $h = 1$ ) as a function of  $V$ . The three insets show the corresponding contour plots of  $X(\omega, \Omega)$  for three different values of the velocity. For reference, the white dot is the  $i$  point,  $i_{2,3} = \{9.425, 14.07\}$ , whose coordinates are independent of the velocity. (b) The orbits of the center of the ellipse and the saddle point in the  $\{\omega, \Omega\}$  plane with decreasing velocity.

### 5.3.5 最大值处的最终位移

到目前为止，我们的重点完全放在最优参数  $\{\omega_{\text{opt}}, \Omega_{\text{opt}}\}$  在二维控制空间中的位置，它们与真实最优值的关系，以及椭圆在最大值周围的方向及其  $h$  指数。检查最优位移  $X$  的实际值并将它们的大小与从两个子系统  $\{A = 1, B = 0\}$  和  $\{A = 0, B = 1\}$  获得的值进行比较可能也很有价值。然后，我们可以检查是否有较大的  $h$  指数对应于两个力的联合作用的最终位移  $X^{\{1,1\}}$  实际上比位移  $X^{\{1,0\}}$  或  $X^{\{0,1\}}$  大得多的情况。我们的数值数据表明，对于我们的特定系统，实际上并不是这种情况，时间和空间激励机制似乎在这里彼此直接竞争。我们没有遇到单个局部最大值，在  $i$  点上计算得出的  $X^{\{1,1\}}$  实际上比  $X^{\{1,0\}}$  或  $X^{\{0,1\}}$  大。例如，对于与  $i$  点  $i_{2,2}$  相关联的第一个局部最大值，我们发现相应的放大因子定义为  $X^{\{1,1\}} / \text{Max}[X^{\{1,0\}}, X^{\{0,1\}}]$  只有 0.48。该比率甚至从 0.44（对于  $i_{3,3}$ ）下降到 0.42（对于  $i_{4,4}$ ）。

首先，这种意外衰减是与临时驱动力的特定初始开启阶段相关的漂移的直接结果。对于  $\{1,0\}$  系统的哈密顿量，即  $H = P^2/2 - \text{Sin}(\omega t) X$ ，时间相关解  $X(t) = t/\omega - \text{Sin}(\omega t)/\omega^2$  揭示了该漂移项  $t/\omega$ 。作为对比，这个大项甚至是谐振子在完全谐振时最大位置的大小的两倍，即  $H = P^2/2 - \text{Sin}(\omega t) X + \omega^2 X^2/2$ ，这需要对  $X(t) = -t/(2\omega) \text{Cos}(\omega t) + \text{Sin}(\omega t)/(2\omega^2)$  进行求解。因此，对于较大且最优的时间，我们发现放大率仅为  $X^{\{1,1\}} / \text{Max}[X^{\{1,0\}}, X^{\{0,1\}}] \approx (t/\omega) / [t/(2\omega)] = 0.5$ ，与上面的数值结果完全一致。从解析结果可以看出，在该系统中， $\{1,1\}$  系统中结合势  $\omega^2 X^2/2$  的存在不能起到对  $X(t)$  起到真正的放大作用。如果我们在  $\{1,0\}$  系统中选择了不同的力开启阶段，例如  $H = P^2/2 - \text{Cos}(\omega t) X$ ，那么解  $X(t) = [1 - \text{Cos}(\omega t)]/\omega^2$  仅是振荡的，且不包含任何漂移项。在这种情况下，相应的  $\{1,1\}$  系统的最大位置，即  $H = P^2/2 - \text{Cos}(\omega t) X + \omega^2 X^2/2$ ，则由  $X(t) = t/(2\omega) \text{Sin}(\omega t)$  决定。这意味着此处放大因子  $X^{\{1,1\}} / \text{Max}[X^{\{1,0\}}, X^{\{0,1\}}]$  实际上会随时间线性增长，反映出时空外力的更具建设性的协作作用。非常明显的一点是，对于任何有限的相互作用时间  $T$ ，该特定系统的全局最大值为  $\{\omega_{\text{opt}}, \Omega_{\text{opt}}\} = \{0,0\}$ ，最优值为  $X(T) = T^2/2$ ，再次表明即使对于该开启阶段，尽管存在共振的可能性，但首选仍然是通过不

存在任何结合势来优化粒子的最终位置。

## 5.4 由于时间或空间激励而产生的正负电子对

在本节中，我们将应用派生的  $i$  点方法来确定物理过程的两个控制参数的可能最优位置，以对优化真空中产生正负电子对的这一动力学过程进行优化。我们将简要总结计算量子场论的方法，以计算真空产生正负电子对过程并确定在给定能量下产生的正负电子对的最终数目。虽然可以基于无限维优化来完成一些先前的仅针对时间或空间场的优化研究，但为了获得对组合时空优化过程的一些了解，我们仅从有限维开始。仅基于两个控制参数进行尺寸优化。随时间变化的电场的特征在于频率  $\omega$  的变化，而对于空间不均匀的电场，我们对空间扩展  $W$  或振幅  $V_b$  做出改变。在这三种（分开的）情况的每一种中，我们都发现了一种机制，在这种机制下，有限的参数可以导致相互作用后生成的正负电子对的最终数量达到一个或多个最大值。本节的关键思想是说明  $i$  点方法甚至可以从经典力学系统中泛化出来，以对量子场论的动力学过程进行预测。

### 5.4.1 计算量子场论简述

首先简要地概述我们的量子场论系统，以描述真空中正负电子对产生过程。它基于与时间相关的狄拉克方程的电子-正电子场算符的数值解， $i \hbar \partial \Psi / \partial t = H \Psi$ 。在一个空间维度（原子单位制，其中  $m = 1, q = -1, \hbar = 1$  和  $c = 137.036$ ）中，哈密顿量采用以下形式：

$$H = c \sigma_1 p_x + \sigma_1 A(x,t) + c^2 \sigma_3 - V(x) \sigma_0 \quad (5-5)$$

其中  $i$  ( $i=0,1,2,3$ ) 表示满足反对易关系  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2 \delta_{ij}$  的四个  $2 \times 2$  泡利矩阵的集合。外场的空间（超临界）部分由具有受控空间不均匀性的（超临界）阶梯函数势  $V(x)$  建模。关联的电场沿  $x$  方向指向，并沿  $x$  方向在空间上定位。用矢势  $A(x,t)$  建模具有受控时间依赖性的时间部分，选择其空间分布图是为了保证时间诱发的正负电子对产

生仅在空间的有限区域中发生，在这一有限区域内  $V'(x)$  不会消失。

初始真空状态由（无外场）狄拉克算符  $H_0 [= c \sigma_1 p_x + c^2 \sigma_3]$  的占据本征态  $|k;d\rangle$  的集合表示，其负能量满足  $H_0|k;d\rangle = -[m^2 c^4 + c^2 k^2]^{1/2} |k;d\rangle$ 。我们假设我们的系统具有有限的空间扩展  $L$ ，并且所有状态都满足周期性边界条件。结果可以将这些状态归一化为  $\langle k_1;d|k_2;d\rangle = \delta_{k_1,k_2}$ ，并且它们具有动量模间隔  $\Delta k = 2\pi/L$ 。动量为  $p$  的相应正能量状态用  $|p;u\rangle$  表示。在计算量子场论[93]中，可以从所有状态  $|k;d\rangle$  的集合的时间演化和所得矩阵元素  $U_{pk}(t) \equiv \langle p;u|U(t)|k;d\rangle$  等价地获得正负电子量子场算符所需的时空演化，其中  $U(t)$  是与  $H$  关联的时间有序演化算子。可以使用高效的基于快速傅里叶变换的劈裂算符方法[94,95]，在具有  $N_t$  个时间网格点和  $N_x$  个空间网格点的时空晶格上获得具有外部电势  $A(x,t)$  和  $V(x)$  的时空相关 Dirac 方程的解。这项工作的重点是从所有时间演化的希尔伯特空间态获得  $N(T) \equiv \sum_{p,k} |U_{pk}(t)|^2$ ，然后得出相互作用后在最终时间  $T$  产生的正负电子对的总数。

为了减少我们的数值模拟的计算时间，在这项工作中，我们仅通过单个初始状态来表示真空，这等效于专注于仅具有特定最终能量  $E$  的电子的产生。在这项工作中，我们选择  $E = 1.25 c^2$  对应于狄拉克正电子的负能量  $-1.25 c^2$  的初态。

#### 5.4.2 仅含时外场的最优频率

时间矢量电势  $A(t)$  的主要特征是其频率  $\omega$ ，相关电场的振幅  $F_0$  和保证平稳接通和断开的整体（超高斯）包络。选择时间打开和关闭以消除对  $N(T)$  的解释中代表真实或准正负电子对的任何歧义[91,96]。为了将含时外场下正负电子对产生限制在发生空间诱导正负电子对产生的同一空间区域（请参阅下面的式 5-7 和 5-8），我们选择  $A(t)$  仅对  $V'(x)$  主要为非零的区域为非零。

$$A(t) = F_0 c/\omega \exp[-(t-T/2)^4/(0.02T^4)] \cos(\omega t) \quad (5-6)$$

在我们的数值模拟中，我们将电场幅度固定为  $F_0 = 0.3 c^3$ 。作为时间控制参数，我们对电势的振荡频率做了改变。

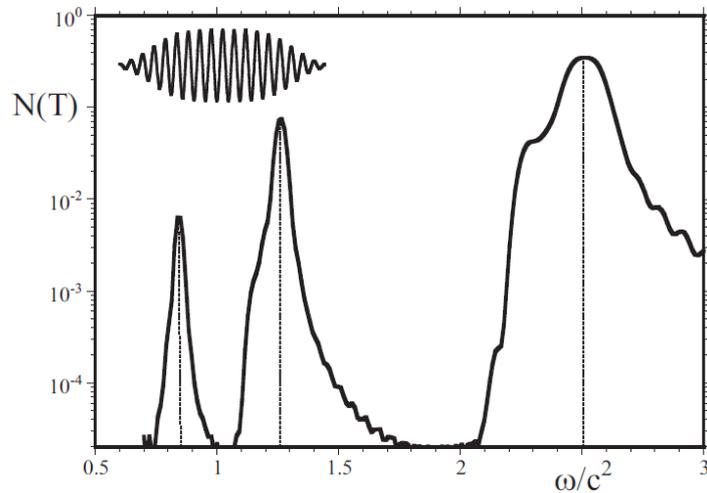


图 5-4 真空态相互作用后产生的正负电子对的最终数  $N(T)$  为随时间变化的电场的频率  $\omega$  的函数，由矢量电势  $A(t) = F_0 c/\omega \exp[-(t-T/2)^4/(0.02T^4)] \cos(\omega t)$  给出，在插图中以  $\omega=c^2$  表示。作为参考，三个垂直虚线指向  $\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}} = 0.844, 1.26$  和  $2.51$ 。 [ $F_0 = 0.3 c^3$ ,  $T = 0.006$  a.u.,  $L=1.5$  a.u., 对于长度为  $L/4$  的空间区域，电场设为非零， $N_x = 4096$ ,  $N_t = 6000$ ]。

Fig.5-4 The final number  $N(T)$  of created electron-positron pairs after the interaction of the vacuum state as a function of the frequency  $\omega$  of a time-dependent electric field given by the vector potential  $A(t) = F_0 c/\omega \exp[-(t-T/2)^4/(0.02T^4)] \cos(\omega t)$ , shown in the inset for  $\omega=c^2$ . For reference the three dashed vertical lines point to  $\omega_{\text{opt}}^{\{1,0\}} = 0.844, 1.26$  and  $2.51$ . [ $F_0 = 0.3 c^3$ ,  $T = 0.006$  a.u.,  $L=1.5$  a.u., the electric field was chosen to be nonzero for a spatial region of length  $L/4$ ,  $N_x = 4096$ ,  $N_t = 6000$ ].

在图 5-4 中，我们显示了与脉冲相互作用后，作为外加电场振荡频率  $\omega$  的函数，最终生成的正电子  $N(T)$  的数量。不出所料， $\omega = 2.51 c^2$  时会出现全局最大值，因为该特定频率大致匹配初始状态（在能量  $E = -1.25 c^2$  时）和正能量连续体中最可能耦合状态的能差（其中  $E = 1.25 c^2$ ）。但是，如果此能差可以与外场频率的任何整数倍匹配，则会出现其他最大值。它们中的前两个在图 5-4 中用虚线表示，分别对应于  $\omega = 1.26 c^2$  和  $\omega = 0.844 c^2$ ，这可以粗略地解释为两个和三个光子的吸收过程的结果。由于将初始状态耦合到连续状态的三个频率实际上非常接近于  $n = 1, 2$  和  $3$  的  $\omega = 2E/n$  给出的值，因此该场致平移以及有限脉冲效应与场振幅  $F_0$  的选择关系不大。实际上，这里我们仍然处于微扰区间，其中峰高  $N(t)$  与场强  $F_0^2$  呈线性，二次方和三

次方关系。

### 5.4.3 仅随空间变化外场的最优宽度

为了建立仅随空间变化的电场下正负电子对产生的稳态，相应的电势  $V(x)$  必须是超临界的，即  $|V(x \rightarrow \infty) - V(x \rightarrow -\infty)| > 2c^2$ 。为了简单起见，也是为了可以通过解析求解得出稳态下的正负电子对产生率，我们在这里研究了由  $V(x) = V_0 [1 - \tanh(x/W)]/2$  形式给出的平滑电势阶跃，其中  $W$  表示宽度。除了下面图 5-5 中显示的数据外，我们将  $V_0$  的值固定为  $2.5c^2$  以确保外场是超临界的。

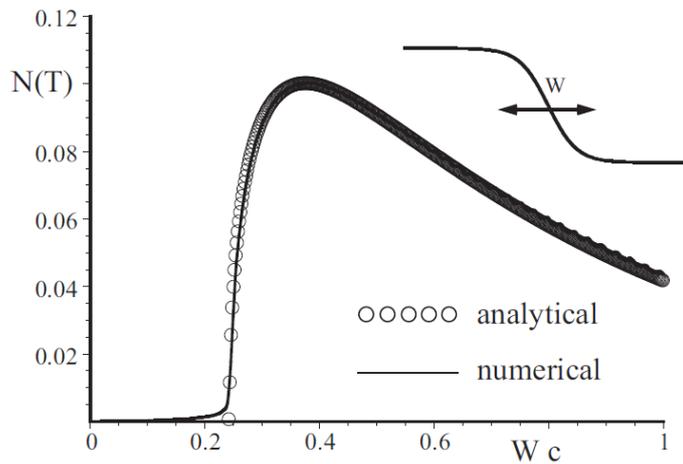


图 5-5 真空态相互作用后，所产生的正负电子对的最终数  $N(T)$  是电场  $E(t) = -dV/dx$  的空间扩展  $W$  的函数，其中  $V(x) = V_0 [1 - \tanh(x/W)]/2$ ， $V_0 = 2.5c^2 (Wc / 0.3)^{1/2}$ ，如图所示。解析预测基于方程式 (5-7) 给出的稳态正负电子对产生率。[ $T = 0.006$  a.u.,  $V(x)$  在  $0.0002$  a.u. 时间内及时平滑地接通]。

Fig.5-5 The final number  $N(T)$  of created electron-positron pairs after the interaction of the vacuum state as a function of the spatial extension  $W$  of the electric field  $E(t) = -dV/dx$ , where  $V(x) = V_0 [1 - \tanh(x/W)]/2$  and  $V_0 = 2.5 c^2 (Wc/0.3)^{1/2}$ , as shown in the inset. The analytical predictions are based on the steady-state pair-creation rate given by Eq. (5-7). [ $T=0.006$  a.u.,  $V(x)$  was turned on smoothly in time over  $0.0002$  a.u.]

在这种情况下，可以根据透射系数  $\tau(E)$  求出每单位能量的正负电子对产生率，该系数由解析表达式[28,97]给出：

$$\tau(E) = -\sinh[\pi p W] \sinh[\pi k W] / \{\sinh[\pi(|V_0|/c + p + k)W/2] \sinh[\pi(|V_0|/c - p - k)W/2]\} \quad (5-7)$$

其中两个动量由  $k = -[(E - |V_0|)^2 - c^4]^{1/2}/c$  和  $p = [E^2 - c^4]^{1/2}/c$  给出。透射系数  $\tau(E)$  可用于通过  $N_{\text{analyt}}(T) = 1/L \tau(E) v_{\text{inc}} T$  构造给定能量  $E$  在最终时间  $T$  上产生的正电子的数密度[85]，其中  $L$  是数值计算的空间尺度大小， $v_{\text{inc}}$  表示（传入）负能态的速度，该负能态以能量  $E$  填充最终的正电子态。

如等式(5-7)中随着宽度  $W$  的增加而单调减少，真正的最优宽度将为零，对应于突然的电势阶跃  $V(x) = V_0(1 - x/|x|)/2$ 。为了研究一种有一个定义明确的最大值而不是位于边界处的情况，我们限制了相应电场的最终“能量” $-dV/dx$  满足  $\int dx (dV/dx)^2 = \text{常数}$ 。该要求导致宽度相关的电势强度  $V_0 = 2.5c^2 (Wc/0.3)^{1/2}$ 。数值 0.3 是任意选择的，因此对于  $W=0.3/c$ ，我们得出  $V_0 = 2.5c^2$ 。显然，由于这种特殊的选择，只有当  $V_0 > 2c^2$ ，即  $2.5c^2 (Wc/0.3)^{1/2} > 2c^2$  时，电势才是超临界的。这意味着仅当宽度满足  $W > 0.192/c$  时才能产生正电子。在相反的极限  $W \rightarrow \infty$  中，相应电场的扩展是无限的，电场的最大振幅接近零，即  $-dV/dx|_{x=0} \rightarrow -1.14c^{5/2}W^{-1/2}$ 。这意味着对于  $W > 0.192/c$  和  $W \rightarrow \infty$  的两个极限，正电子产生率都消失了，我们期望两者之间有一个最大值。通过使  $\tau(E)$  的导数等于零，我们发现  $E = 1.25c^2$  的最优宽度出现在  $W_{\text{opt}} = 0.375/c$  处。

在图 5-5 中，我们根据等式(5-7)显示了  $N(T)$  的（基于产生率的）解析预测，以及在相互作用时间  $T = 0.006 \text{ a.u.}$  之后通过数值计算获得的正电子数量。结果的一致性非常好，这表明该交互时间足够长，以至于与有限时间相关的瞬态时间接通效应并不那么重要。

#### 5.4.4 仅随空间变化外场的最优幅度 $V_b$

作为控制空间电势  $V(x)$  的补充方法，我们还对位于第 5.4.3 节中讨论的 Sauter 电势之上的，宽度为  $d$  的另一个凸起的幅度  $V_b$  做了改变。对  $V(x)$  进行此特定选择的原因有两个。首先， $V(x)$  很好地模仿了最优电势的实际空间形状，可以通过无限维优化方案以数值方式获得。其次，由于其简单的函数形式，可以获得稳态正负电子对产生率的近似解析形式。这种势的函数形式为：

$$V(x) = V_0 [1 - \tanh(x/w)]/2 + V_b [\tanh((x+d)/w) - \tanh(x/w)]/2 \quad (5-8)$$

其中, 振幅  $V_0 = 2.5 c^2$ , 宽度  $w = 0.1/c$ , 尺寸  $d = 1/c$  保持恒定。在图 5-6 的插图中, 我们显示了该电势  $V(x)$  的空间分布形式。对于与图 5-5 相似的参数, 我们在此还显示了在与该超临界电势相互作用后生成的正电子的最终数量  $N(T)$ , 该数量取决于附加凸点的幅度  $V_b$ 。

最大值和最小值的序列与在凸起的空间扩展  $d$  下相应的负能态的波长之间的共振匹配相关。与第 5.4.3 节中讨论的电势类似, 此处的  $N(T)$  数据也可以由解析表达式近似。如果我们假设空间宽度  $w$  等于零, 那么超临界标量势的特征在于两个突变阶跃, 对于  $x < -d$ , 由  $V(x) \equiv V_0$  给出; 对于  $-d < x < 0$ , 由  $V(x) \equiv V_0 + V_b$  给出; 对于  $x > 0$ ,  $V(x) \equiv 0$ 。由于其简单的函数形式, 可以根据连续性方程, 通过在  $x = -d$  和  $x = 0$  处的边界处匹配解析解, 来为正能量  $E$  解析地构建对应的静态能量本征态。参考文献中[98]得出了透射系数的最终解析表达式  $\tau(E) = 4 c^4 p q_0 q_1^2 / (N_1 + N_2)$ , 其中:

$$N_1 \equiv c^2 q_1^2 [(E - c^2)^{1/2} (E_0 - c^2)^{1/2} + (E + c^2)^{1/2} (E_0 + c^2)^{1/2} + c^2]^2 \cos^2(q_1 d) \quad (5-9a)$$

$$N_2 \equiv \{E_1 [(E + c^2)^{1/2} (E_0 - c^2)^{1/2} + (E - c^2)^{1/2} (E_0 + c^2)^{1/2} + c^2] + c^2 [(E + c^2)^{1/2} (E_0 - c^2)^{1/2} - (E - c^2)^{1/2} (E_0 + c^2)^{1/2}] \}^2 \sin^2(q_1 d) \quad (5-9b)$$

且三个动量为  $p(E) \equiv (E^2 - c^4)^{1/2}/c$ ,  $q_1(E) \equiv [(V_b + V_0 - E)^2 - c^4]^{1/2}/c$  和  $q_0(E) \equiv [(V_0 - E)^2 - c^4]^{1/2}/c$ , 且相关的位移能量为  $E_0 \equiv V_0 - E$  和  $E_1 \equiv V_b + V_0 - E$ 。

如上所述, 我们可以在此处再次通过  $N_{\text{analyt}}(T) = 1/L \tau(E) v_{\text{inc}} T$  近似估计能量为  $E$  时产生的正电子的最终数量, 如图 5-6 中的空心圆圈所示。两组数据之间的差异与精确数据的非零宽度  $w$  以及与任何临时打开的力场不可避免地相关的早期瞬态相关。由于  $N(T)$  随着宽度  $w$  的增加而均匀减小, 因此解析数据 (基于  $w = 0$ ) 理应高估了所产生正电子的真实数量。为了从与非零宽度  $w$  相关的瞬态效应中将瞬态效应分离出来, 我们对  $w = 0$  的电势重复了数值模拟。为了适当地采样  $x = -d$  和  $x = 0$  时  $V(x)$  的相应突然变化, 需要极大量的空间网格点才能获得数值收敛的结果。我们发现, 大到  $V_b < 10c^2$  的数据在图上与等式(5-9)所预测的解析数据无法区分。这取决于早期瞬态时间之后的  $N(t)$  是高于还是低于解析预测 (基于稳恒增长率  $1/L \tau(E) v_{\text{inc}}$ ), 在交互作用

结束时，解析表达式会低估或高估生成的正电子的最终数量。

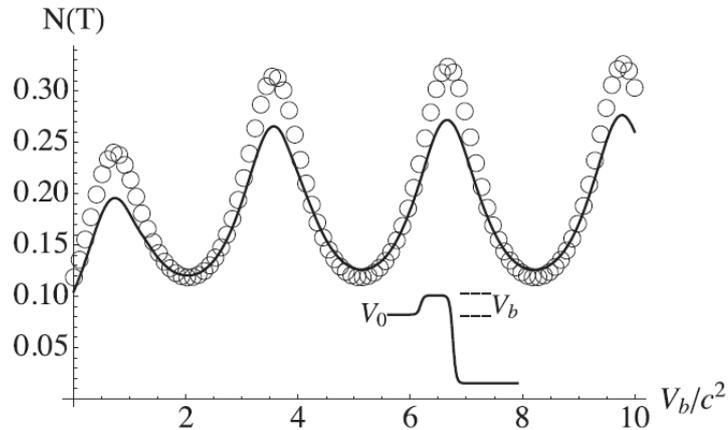


图 5-6 在外场和真空态的相互作用之后，所产生的正负电子对的最终数  $N(T)$  是凸点幅度  $V_b$  的函数。如文中所述和上图所示， $V(x)$  对应于平滑的两阶电势。空心圆是根据解析表达式 Eq(5-9) 的近似和基于产生率的预测 [ $V_0 = 2.5 c^2$ ,  $T = 0.006$  a.u., 电势在 0.0001 a.u. 的时间内平稳地开启]。

Fig.5-6 The final number  $N(T)$  of created electron-positron pairs after the interaction of the vacuum state as a function of amplitude  $V_b$  of the bump. Here  $V(x)$  corresponds to a smooth two-step potential as described in the text and shown in the inset. The open circles are the approximate and rate-based predictions according to the analytical expression Eq. (5-9). [ $V_0 = 2.5 c^2$ ,  $T=0.006$  a.u., the potential was turned on smoothly over a time 0.0001 a.u.]

正如图 5-6 中的数据所暗示的那样，最大值的位置可以通过解析表达式很好地近似。前三个最大值的精确值由  $V_b/c^2 = \{0.733, 3.56, 6.66\}$  给出，与解析结果  $V_b/c^2 = \{0.731, 3.57, 6.67\}$  的差别很小。

## 5.5 同时时空激励产生正负电子对

现在，通过两个退耦合的单参数动力学可以很好地定义  $i$  点。在本节中我们将首次检查含时力场和空间相关力场的组合作用。我们在这里说明一组具体的参数， $i$  点方法可以指导我们缩小搜索范围以获取最优参数。关键点观察到的事实是，5.3 节中的简单模型系统关于  $i$  点的有效性以及 Hessian 指数及其图形化表示的方法确实可

以推广到这个更为复杂的量子场论系统。对于含时系统，我们已经看到，一组三个特定频率 $\omega_{\text{opt}}$ 导致了最大的正负电子对产生率。如果将此系统与第 5.4.3 节中描述的空间力相结合，导致最优宽度  $w_{\text{opt}}/c=0.375$ ，我们可以构造相应的三个  $i$  点。在第 5.5.1 节中，我们将展示这三个  $i$  点确实可以为真实最优位置提供有效的指导。

非常相似地，幅度表示的空间变化导致前三个最优值由  $V_{b,\text{opt}} = 0.733c^2$ 、 $3.56c^2$  和  $6.65 c^2$  给出。如果将此空间力场与含时外力相结合，我们可以构造一组九个  $i$  点。在下面的第 5.5.2 节中，我们将显示，即使在系统中，九个  $i$  点中的每一个都可以为真实最优点的位置提供有效的指导。

### 5.5.1 同时优化场的频率和空间宽度

在图 5-7 中，我们绘制了时空驱动系统的前三个最优值，分别位于  $\{\omega/c^2, Wc\} = \{0.8803, 0.3722\}$ ,  $\{1.252, 0.3919\}$  和  $\{2.482, 0.4232\}$ 。我们还显示了附近的相应椭圆等高线图。最大值与 Hessian 指数  $h = 0.1667$ 、 $0.0047$  和  $0.00224$  相关，反映了它们的共生程度。半长轴的相应相对定向角为  $\alpha = -8.57^\circ$ 、 $-3.54^\circ$  和  $-2.37^\circ$ 。使用从第 5.4.2 节和第 5.4.3 节中得出的仅时空激发获得的数据，我们可以构造相应的三个  $i$  点  $\{\omega^{\{1,0\}}/c^2, W^{\{0,1\}}c\} = \{2.52, 0.375\}$ ,  $\{1.26, 0.375\}$  和  $\{0.844, 0.375\}$ 。将它们与同时激励系统的最优值进行比较，我们发现它们确实可以为真实最优值的位置提供出色的指导。

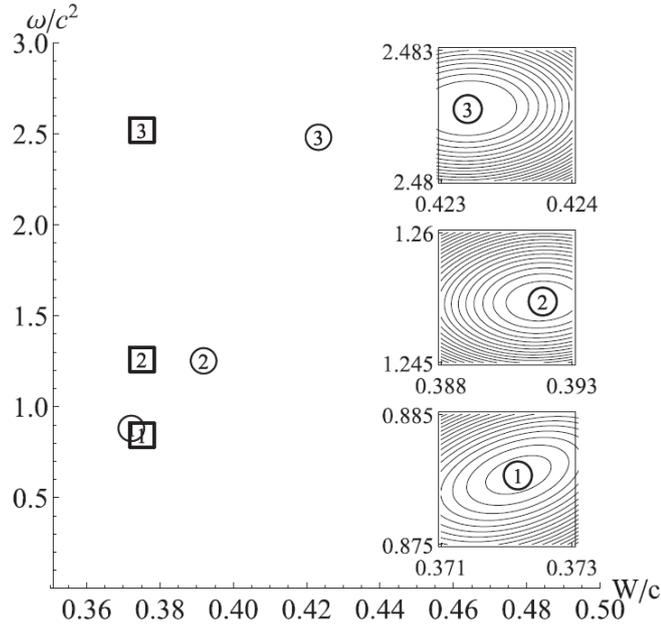


图 5-7  $(\omega, W)$  平面中  $N(T)$  的真最优值 (空心圆) 和相应的  $i$  点 (空心正方形) 的位置。在插图中, 我们显示了围绕真实最大值的相应等高线图。  $i$  点位于  $i_1 = \{\omega/c^2, Wc\} = \{0.844, 0.375\}$ ,  $i_2 = \{1.26, 0.375\}$ ,  $i_3 = \{2.52, 0.375\}$  且相应的真实最优值为  $\{0.880, 0.372\}$ ,  $\{1.25, 0.392\}$  和  $\{2.48, 0.423\}$ 。 [ $F_0 = 0.3c^3$ ,  $V_0 = 2.5 c^2$ ,  $T = 0.006$  a.u., 电势  $V(x)$  在 0.0001 a.u. 的时间内平稳地开启。]

Fig.5-7 The locations of the true optima (open circles) and the corresponding  $i$ -points (open squares) for  $N(T)$  in the  $(\omega, W)$  plane. In the inset we show the corresponding contour plots around the true optima. The  $i$ -points are located at  $i_1 = \{\omega/c^2, Wc\} = \{0.844, 0.375\}$ ,  $i_2 = \{1.26, 0.375\}$ ,  $i_3 = \{2.52, 0.375\}$  and the corresponding true optima are at  $\{0.880, 0.372\}$ ,  $\{1.25, 0.392\}$  and  $\{2.48, 0.423\}$ . [ $F_0 = 0.3c^3$ ,  $V_0 = 2.5 c^2$ ,  $T = 0.006$  a.u., the potential  $V(x)$  was turned on smoothly over a time 0.0001 a.u.]

为了判断两个力的同时存在是否确实可以增强真空极化, 我们在此还计算了相应的放大系数, 在此定义为 (类似于 5.3.5 节中的讨论)  $N(T)^{\{1,1\}} / \text{Max}[N(T)^{\{1,0\}}, N(T)^{\{0,1\}}]$ 。作为参考, 空间相关外场产生的正负电子对的产额为  $N(T)^{\{0,1\}} = 0.100$  (比较图 5-5), 而对于时间激励, 我们测量了  $N(T)^{\{1,0\}} = 6.86 \times 10^{-3}$ ,  $7.63 \times 10^{-2}$  以及  $3.47 \times 10^{-1}$ , 如图 5-4 所示。如果确定在同时作用下真空中产生的实际最终正负电子对产额, 则会发现相应的放大系数为 1.047、1.323 和 0.95879。这表明与更简单的振子模型的情况类似, 两种力都不能真正显著地相互协作增加真空中正负电子对产生率。当然, 需要进行更详细和系统的研究, 以检查所有一般性原则, 这些一般性原则将使我们能够预测, 与

i 点相关的正负电子对产额相比，哪种最优方法可以实现最大的扩增。

### 5.5.2 同时优化场的频率和空间幅度

为了对我们的发现进行一般性的第二次独立测试，在本节中，我们同时优化了随时间变化的磁场的频率以及空间力场的幅度  $V_b$ 。上面我们检查了每个时空系统的前三个最优值。这导致对九个 i 点的位置预测。为了更好地进行比较，我们在表格中显示了九个坐标对以及组合系统的真实最优值。与我们先前的发现一致，我们在这里还看到，九个 i 点中的每一个都可以再次为真实最优点的位置提供（非常准确的）指导。除了与  $\{\omega, V_b\} = \{2.52c^2, 0.733c^2\}$  对相关的 i 点外，我们发现平均误差定义为  $(\text{Err}^{\{1,0\}} + \text{Err}^{\{0,1\}})/2$ ，其中  $\text{Err}^{\{1,0\}} \equiv (\omega^{\{1,1\}} - \omega^{\{1,0\}}) / \omega^{\{1,1\}}$  和  $\text{Err}^{\{0,1\}} \equiv (V_b^{\{1,1\}} - V_b^{\{0,1\}}) / V_b^{\{1,1\}}$  通常显著小于 1%，这也说明了 i 点对于该系统的有效性。

表 5-1 最优频率  $\omega$  和空间凸点振幅  $V_b$  与相应 i 点  $\omega^{\{1,0\}}$  和  $V_b^{\{0,1\}}$  的坐标对的比较 [ $F_0 = 0.1 c^3$ ,  $T = 0.006 \text{ a.u.}$ , 对于空间域  $1.5/4 < x < 1.5/2$ , 电场设置为非零]。

Fig.5-1 Comparison of the optimal frequency  $\omega$  and spatial bump amplitude  $V_b$  with the coordinate pair of the corresponding i points  $\omega^{\{1,0\}}$  and  $V_b^{\{0,1\}}$ . ( $F_0 = 0.1c^3$ ,  $T = 0.006 \text{ a.u.}$ ; the electric field  $b$  was chosen to be nonzero for the spatial domain  $1.5/4 < x < 1.5/2$ ).

| $\omega_L^{\{1,0\}}$ | $\omega_L^{\{1,1\}}$ | $V_b^{\{0,1\}}$ | $V_b^{\{1,1\}}$ | % Error | $h$ Index            | Angle $\alpha$ |
|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------|---------|----------------------|----------------|
| 0.838                | 0.851                | 0.733           | 0.729           | 1.0%    | $3.3 \times 10^{-7}$ | $0.2^\circ$    |
| 0.838                | 0.858                | 3.56            | 3.56            | 1.3%    | $8.9 \times 10^{-4}$ | $-1.8^\circ$   |
| 0.838                | 0.871                | 6.65            | 6.65            | 2.0%    | $3.7 \times 10^{-4}$ | $-1.5^\circ$   |
| 1.26                 | 1.25                 | 0.733           | 0.731           | 0.5%    | $1.1 \times 10^{-5}$ | $0.5^\circ$    |
| 1.26                 | 1.26                 | 3.56            | 3.56            | 0.2%    | $1.7 \times 10^{-5}$ | $0.1^\circ$    |
| 1.26                 | 1.26                 | 6.65            | 6.65            | 0.2%    | $9.1 \times 10^{-5}$ | $5.2^\circ$    |
| 2.52                 | 2.52                 | 0.733           | 0.524           | 14%     | $1.1 \times 10^{-5}$ | $0.01^\circ$   |
| 2.52                 | 2.52                 | 3.56            | 3.57            | 0.1%    | $7.2 \times 10^{-2}$ | $-0.6^\circ$   |
| 2.52                 | 2.52                 | 6.65            | 6.66            | 0.05%   | $6.2 \times 10^{-2}$ | $-0.7^\circ$   |

最后，在表 5-2 中，我们再次检查了相关的放大因子。

表 5-2 表 5-1 的 9 个最优值的每个对应的平均放大因子  $N(T)^{\{1,1\}}/\text{Max}[N(T)^{\{1,0\}}, N(T)^{\{0,1\}}]$ 。

Fig.5-2 The corresponding average amplification factors  $N(T)^{\{1,1\}}/\text{Max}[N(T)^{\{1,0\}}, N(T)^{\{0,1\}}]$  for each of the nine optima of Table 5-1.

| $\omega_L^{\{1,1\}}$ | $V_b^{\{1,1\}}$ | $N(T)^{\{1,1\}}$ | Amplification |
|----------------------|-----------------|------------------|---------------|
| 0.851                | 0.729           | 0.194897         | 0.9952        |
| 0.858                | 3.56            | 0.265196         | 0.9981        |
| 0.871                | 6.65            | 0.271256         | 0.9980        |
| 1.25                 | 0.731           | 0.196363         | 1.0027        |
| 1.26                 | 3.56            | 0.2664           | 1.0027        |
| 1.26                 | 6.65            | 0.271963         | 1.0003        |
| 2.52                 | 0.524           | 0.344704         | 1.7601        |
| 2.52                 | 3.57            | 0.378513         | 1.4246        |
| 2.52                 | 6.66            | 0.381796         | 1.4042        |

我们再次发现这些仅是微不足道的放大，这表明这里在时间和空间上引起的真空中正负电子对产生机制也相互竞争。唯一的例外发生于  $\{\omega, V_b\} = \{2.52c^2, 0.733c^2\}$ ，其中  $i$  点以最大误差(14%)预测了最优点。此处正负电子对产额的放大因子(= 1.76)实际上最大。

## 5.6 研究总结及尚待解决的问题

在这项工作中，我们引入了  $i$ -point 方法来分析使物理输出最大化的最优时空参数的位置。由于这些  $i$  点反映了两个独立的动力学过程，因此可以很容易地获得它们，并且可以为参数空间中原本非常复杂的情况提供指导。这种方法可以潜在地降低优化算法的数值复杂度。作为概念的第一个证明，我们首先考虑了一个相对简单的模型系统来说明数学概念，然后将这些概念推广到由真空产生正负电子对这样更为复杂的动力学中。这是非平凡系统的一个例子，其中同时优化电磁辐射脉冲的空间和时间特性在实验上显然是具有重大意义的。由于最近几年计算能力上的飞速进步，已经有可能在单独的空间或时间激励下优化这些特性。在这项工作中我们研究共生优化的概念，

以使我们能够检查联合作用的最优特性。我们发现，根据参数范围区间的不同，产生的正负电子对的最终数量的空间幅度优化和含时优化可以是共生的或非共生的。我们还概括了  $i$  点的概念，并表明它们可以为联合作用所激发的系统的最优参数起到有效的指导作用。

针对这个较为困难的“优化”问题，为了系统性地开展第一步工作，我们首先仅通过单个时空参数对每个场进行参数化。当然，问题还有是否存在关于 Hessian 指数，如何得到关于 Hessian 指数的基本结论，以及计算上容易得多的  $i$  点作为确定真实最大值的指导的实用性是否可以推广到更高维度的优化方案。例如，如果要通过  $N$  个参数  $s_j$ （空间扩展，幅度等）同时对空间场进行参数化，且类似地具有  $M$  个参数  $t_j$  的含时外场，则该  $(N + M)$  维空间中最优  $(N + M)$  参数周围的相应超椭圆体也可以由广义 Hessian 指数来表征。它将推广至  $h \equiv \sum_{ij} [\partial^2 F / (\partial t_i \partial s_j)]^2 / \{ \sum_i [\partial^2 F / (\partial t_i \partial t_i)] \sum_i [\partial^2 F / (\partial s_i \partial s_i)] \}$ ，对于  $N=M=1$ ，自然会减少到我们的原始 Hessian 指数  $h = [\partial^2 F / (\partial t_1 \partial s_1)]^2 / \{ [\partial^2 F / (\partial t_1 \partial t_1)] [\partial^2 F / (\partial s_1 \partial s_1)] \}$ 。在理想的未来情况下，我们可以允许同时对空间自由度和时间自由度在无限维度上进行优化，因此  $i$  点将成为两部分的  $i$  函数，但它们在预测同时作用最优位置时的基本功能应该与此处讨论的相同。

对于本文研究的几何构型，隧穿和基于多光子的正负电子对产生机制似乎相互竞争，而对于其它情况，例如所谓动力学辅助的 Schwinger 效应[99,100]，两种外场可以互相促进以提高最终正负电子对产额。在我们的系统中观察到的两种外场具有竞争性的现象，可能是由于我们将比较的重点放在那些已经单独优化每个外场并得出  $i$  点的情况下。我们应该以对电磁场配置的最优时空分布的物理可实现性的批判性评论来总结这一观点。尽管这项工作的重点是优化真空态的量子场论动力学响应，但值得注意的是，任何在三维上可通过实验实现的电磁场都必须满足麦克斯韦方程组及边界条件的限制，这些将对以上外场的时空优化带来新的限制。因此有必要在此指出，除了满足正负电子对产额优化条件，同时满足麦克斯韦理论的外场和边界条件，将是未来研究的重点。

## 第六章 全文总结和展望

### 6.1 总结

随着近年来超短超强激光技术的飞速发展，实验上可得到的激光聚焦强度不断提升，对应的电磁场强度也越来越高，激光与物质的相互作用开始从相对论效应主导的区间向 QED 效应显著的区间迈进。本文主要研究的物理过程是量子场论描述的极强外场与真空作用产生正负电子对的过程，重点关注的问题是如何最优化外场，以获得最大的正负电子对产额。我们运用最优控制理论，通过数值求解 Dirac 方程对这一问题进行了较为系统的研究，论文的主要研究内容和创新点总结如下：

1. 通过数值求解量子场论狄拉克方程，我们研究了空间局域超临界电场诱发的真空正负电子对产生过程，通过改变该外场的空间分布，搜索最优外场结构，使稳态下的正负电子对产生率最大化。首先我们以具有单个峰值的四种不同结构的外加电场为例，在限定外加电场能量的情况下，对这四种电场作用下真空中正负电子对的产生率进行了比较，发现对于具有单个最大值和固定总能量的电场脉冲形状，其产生率并非单调依赖于场的空间宽度；随后我们以矩形外加电场为基准，对原有的 Schwinger 产生率公式进行了校正，校正后的公式可以为具有单个峰值的外场下正负电子对产生的阈值行为以及有限脉冲效应提供解析预测；之后我们对具有两个峰值结构的外加电场作用下真空中正负电子对产生率进行了研究，发现在同样的外场能量限制条件下，两峰结构电场作用下的正负电子对产生率要小于相应单峰结构电场的产生率，且两峰结构电场的产生率随着峰间距的增大而单调下降，这表示新增加的自由度（峰间距）对正负电子对的产生并没有起到提升的作用，反而产生了抑制。最后，通过对原始 Schwinger 产生率公式的分析，以及使用经典力学对粒子占有时间的判定方法，发现具有均匀空间分布的简单电场脉冲实际上已经非常接近最优电场，这一意外发现也与

基于具有适当约束下的变分原理结果相一致。

2. 我们通过对耦合到同一含时外力的多个相互独立系统的动力学的研究, 利用最优控制理论, 得到了该外力最优化的脉冲形状, 使得这些系统的集体响应同时最大化。我们发现, 对于某些系统, 此集体响应的最优力与每个系统单独响应的最优力可以解耦, 因此可以先对这些单个力分别进行优化, 然后通过线性叠加, 得到集体响应的最优解。我们将这一方法称为集体响应的叠加原理。运用该方法, 我们首先对带阻尼的线性和非线性振子进行了数值和解析研究。对于振子系统而言, 这种集体响应是最终所有振幅的加权总和。我们发现, 对于线性振子系统, 集体响应的叠加原理所预测的结果和数值模拟结果吻合的很好; 对于非线性振子系统, 当外场能量较小或相互作用时间较短时, 我们可将外场和非线性振子系统的相互作用视作微扰过程, 此时也可以使用集体响应的叠加原理对最优外场进行预测。最后, 我们将此叠加原理应用于对激光脉冲最优时间波形的预测, 该最优波形可以使一组量子力学两能级原子的最终宏观总偶极矩最大化, 结果发现, 当激光脉冲能量较小或激光与两能级系统相互作用时间较短时, 同样可以使用该叠加原理对最优外场进行预测, 得到比较理想的结果。由于整个真空中正负电子对产生动力学过程等效于相互独立的两能级系统的无穷集合的集体动力学, 因此该方法可以推广应用到真空中含时外场从负能级向正能级激发电子, 产生正负电子对的最优化研究。

3. 通过最优控制理论, 对一般含时外场下及具有任意空间依赖的超临界电场下真空中正负电子对的产生分别开展了研究。在外场能量一定的情况下, 我们确定了一些含时脉冲形状, 使得原来在狄拉克海中具有一定动量分布的虚粒子产生正电子的产额最大化。在脉冲能量足够小或相互作用时间足够短的微扰情形下, 我们获得了与给定的终态正电子动量分布对应的最优激发外场的解析形式。当脉冲能量足够大或相互作用时间足够长的情况下, 外场与真空的相互作用进入非微扰区间, 此时解析结果和数值结果出现了明显的不同。我们还研究了具有空间依赖的超临界电场的最优化: 在正无穷远处和负无穷远处电势高度差保持一定的约束条件下, 通过开发基于梯度下降的数值优化算法, 获得了使得正电子产生率最大化外场的空间形状, 并通过利用狄拉

克-哈密顿量负能量本征态之间共振的解析模型对其中的物理机制进行了解释，最后通过集体响应的叠加原理，对于在超临界范围内的所有能量，使得总正负电子对产生率最大化的最优电势。这一点意味着我们从定性上证实了最初只为时间系统导出的集体响应的叠加原理对空间优化同样适用。

4. 对应于真空中正负电子对产生的两种渠道，即多光子跃迁和隧穿过程，我们研究了同时具有时间依赖和空间依赖外场的时空共生优化关系。为了对一般性系统的共生程度进行分类，我们引入了一种定量方法，即通过无量纲 Hessian 指数的值来判断是否存在共生优化关系。在一开始，我们从一个简单模型（单位质量的受驱谐振子）来开展对共生优化关系的研究，目标是使得最终时刻的位移最大化。结果我们发现，在这个特定的振子系统中，全局最优是非共生的，而第一个局部最优是共生的。随后我们还对真空中产生正负电子对的时空共生优化关系进行了研究，结果发现：在大多数参数区间范围内，通过对外场的时间特征参数——频率和空间特征参数——场的宽度和凸起高度的同时优化，对于正负电子对产生最优的随时间和空间变化的外场实际上类似于分别针对空间和时间做独立优化后的组合场；而在某些特定的参数区间范围内，时空优化是共生的，即时空自由度的同时作用可能导致新的最优时空场结构，这种情况下不能从单独两个场的独立优化中推论出最优结果。

## 6.2 展望

本文已完成的研究工作中还具有许多局限性，例如，我们到目前为止还只对外场的时空共生优化关系做了初步的探索，并未对具有含时和空间依赖关系的外场进行无限维的最优化研究。而且由于计算时间的限制，本文的所有数值模拟工作仅限于一维模拟，且没有考虑到外加磁场对正负电子对产生的影响。要想对未来开展的实验有着更高的指导价值，有必要在空间上对场致真空中正负电子对产生进行全三维的模拟，而我们知道任何在三维上可通过实验实现的电磁场都必须满足麦克斯韦方程组和相应的边界条件，这些都将对场的时空优化带来新的限制。将来需要围绕着这些问题，对外加电磁场的时空优化进行进一步探索与研究。

总之，极强场 QED 过程的研究正在兴起，随着实验手段的进步，强场 QED 相关的理论预测将一步一步在实验上得以实现。尽管真空中产生正负电子对这一过程在实验上尚未实现，但在理论上已经有多种方案，使得外场强度在 Schwinger 阈值以下也能大量产生正负电子对。这使得我们有足够理由相信，在不远的未来，真空中大量产生正负电子对这一非线性 QED 现象可以在实验上直接实现。数值方法的快速发展，使我们能更深入理解相关物理机制，并对其细节进行进一步描述，从而可能为未来的实验提供指导。随着计算设备性能的逐步提升以及数值模拟计算方法的进一步优化，数值方法将在未来发挥越来越重要的作用。值得指出的是，在当前的激光强度下，例如数十拍瓦激光，极强场 QED 的研究将首先在 QED-Plasma 的研究中出现，极强场将与等离子体中的带电粒子或光子作用，这时同样有正负电子对的产生，甚至级联过程产生，这虽然与真空产生正负电子对的原理有所不同，但对这些过程的理解，是真正理解真空产生正负电子对的基础，以及将来探测真空正负电子对噪音研究的基础。我们有理由相信，随着对这些物理过程的进一步理解，以及激光强度的进一步提升，极强场和物质及真空相互作用这一研究领域一定会有更为光明的未来，更多的新物理现象将被不断发现。

## 附录 A 集体响应的最优控制理论

考虑  $N$  个独立的动力学系统，每个系统都具有  $m$  个自由度，由  $I$  维向量  $\mathbf{Y}_n(t) \equiv \{Y_{1,n}(t), Y_{2,n}(t), \dots, Y_{I,n}(t)\}$  表示。我们还假设每个向量必须满足相应的方程：

$$d\mathbf{Y}_n/dt = \mathbf{K}_n[\mathbf{Y}_n, U(t)], \quad (\text{A-1})$$

其中  $I$  分量向量  $\mathbf{K}_n$  可以是  $\mathbf{Y}_n$  和外力  $U(t)$  的一般函数。我们还假设已知初始值  $\mathbf{Y}_n(t=0)$ 。目的是构建尽可能最优的脉冲形状  $U(t)$ ，以使所有  $N$  个系统的集体响应最大化，例如在给定时间  $T$  系统最终振幅的一定加权叠加变为最大。换句话说，我们可能要优化目标  $J'$

$$J' \equiv \sum_n \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T) \quad (\text{A-2})$$

在这里，我们可以选择特定的权重因子  $w_{i,n}$ ，以可能的方式加权第  $n$  个系统的每个振幅  $Y_{i,n}$  的贡献。为了限制力  $U(t)$  的可能范围，我们仅考虑那些具有给定“能量”  $E$  的力，即  $U(t)$  必须满足约束  $E = \int dt U(t)^2$ ，从现在开始，所有时间积分的积分极限从  $t = 0$  到  $t = T$ 。如果我们引入单个拉格朗日乘数  $\lambda_0$  来说明此约束

$$J' = \sum_n \{ \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T) + \lambda_0 [E - \int dt U(t)^2] \} \quad (\text{A-3})$$

此外，我们需要一组拉格朗日函数  $\lambda_n(t)$  来解释运动方程(A-1)。由于每个系统都有几个自由度，因此符号  $\lambda_n(t)$  指的是  $I$  分量向量，其中各个分量由  $\lambda_{i,n}(t)$  表示。因此，我们得出目标  $J$ ，它是  $\lambda_0$  的函数，是  $U(t)$ 、 $\mathbf{Y}_n(t)$  和  $\lambda_n(t)$  的泛函。

$$J = \sum_n \{ \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T) + \int dt [\lambda_n (\mathbf{K}_n - d\mathbf{Y}_n/dt)] + \lambda_0 [E - \int dt U(t)^2] \} \quad (\text{A-4})$$

实际上，如果我们根据以下内容定义集体哈密顿量，可以简化符号：

$$H \equiv \sum_n \lambda_n \mathbf{K}_n = \sum_n \sum_i \lambda_{i,n} K_{i,n} \quad (\text{A-5})$$

然后目标函数简化为：

$$J = \sum_n \{ \sum_i w_{i,n} Y_{i,n}(T) - \int dt \lambda_n d\mathbf{Y}_n/dt \} + \lambda_0 [E - \int dt U(t)^2] + \int dt H \quad (\text{A-6})$$

如果我们计算目标函数的变化量  $\delta J$ ，可得

$$\begin{aligned} \delta J = \sum_n \{ \sum_i w_{i,n} \delta Y_{i,n}(T) - \int dt [\delta \lambda_n dY_n / dt + \lambda_n \delta [dY_n / dt]] \} \\ + \delta \lambda_0 [E - \int dt U(t)^2] - \lambda_0 \int dt 2U \delta U + \int dt \delta H \end{aligned} \quad (A-7)$$

对于包含 $\delta[dY_n/dt]$ 的部分积分后, 使用 $\delta Y_n(t=0) = 0$ , 由于固定的初始条件, 我们将 $-\lambda_n \delta Y_n = -\sum_i \lambda_{i,n} \delta Y_{i,n}$ 代入并获得

$$\begin{aligned} \delta J = \sum_n \{ \sum_i [w_{i,n} - \lambda_{i,n}(T)] \delta Y_{i,n}(T) - \int dt [\delta \lambda_n dY_n / dt - d\lambda_n / dt \delta Y_n] \} \\ + \delta \lambda_0 [E - \int dt U(t)^2] - \lambda_0 \int dt 2U \delta U + \int dt \delta H \end{aligned} \quad (A-8)$$

接下来, H 的变化量为

$$\delta H = (\partial H / \partial U) \delta U + \sum_n \{ (\partial H / \partial Y_n) \delta Y_n + (\partial H / \partial \lambda_n) \delta \lambda_n \} \quad (A-9)$$

使用 H 的特定定义, 偏导数简化为 $\partial H / \partial \lambda_n = \mathbf{K}_n$ 。如果现在我们要求最优解的变分 $\delta J$ 消失, 则必须要求每个变量的每个辅因子 $\delta U$ ,  $\delta \lambda_0$ ,  $\delta \lambda_n$ ,  $\delta Y_n$  和 $\delta Y_n(T)$ 都消失, 即我们获得

$$\lambda_0 2U + \partial H / \partial U = 0 \quad (A-10)$$

$$E - \int dt U(t)^2 = 0 \quad (A-11)$$

$$dY_n / dt = \partial H / \partial \lambda_n = \mathbf{K}_n, Y_n(0) = Y_n(t=0) \quad (A-12)$$

$$d\lambda_n / dt = -\partial H / \partial Y_n = -\lambda_n \partial \mathbf{K}_n / \partial Y_n, \lambda_n(T) = w_n \quad (A-13)$$

等式(A-10)是主要的控制方程, 可以求解 $U(t)$ 得到 $U(t) = (2\lambda_0)^{-1} \partial H / \partial U$ 。在一般情况下, 这是一个超越方程,  $U(t)$ 必须满足

$$U(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n \lambda_n \partial \mathbf{K}_n(Y_n, U) / \partial U \quad (A-14)$$

通常, 这是 $U(t)$ 必须满足的一个非常复杂甚至可能超越的方程。由于每个系统都能以功能上不同的方式耦合到力 $U(t)$ , 因此需要选择单个Lagrange参数 $(2\lambda_0)^{-1}$ , 以满足等式(A-11), 即 $E - \int dt [(2\lambda_0)^{-1} \sum_n \lambda_n \partial \mathbf{K}_n(Y_n, U) / \partial U]^2 = 0$ 。因此, 我们得到能量归一化因子

$$(2\lambda_0)^{-1} = E^{1/2} \left\{ \int dt [\sum_n \lambda_n \partial \mathbf{K}_n(x_n, p_n, U) / \partial U]^2 \right\}^{-1/2} \quad (A-15)$$

## 附录 B 集体响应的叠加原理

我们接着附录 A 来研究一种特殊情况，其中运动方程的右侧由简单矩阵给出。我们考虑的系统是  $d\mathbf{Y}_n/dt = \mathbf{M}_n \mathbf{Y}_n + \mathbf{V}_n \mathbf{U}(t)$ 。时间常数向量  $\mathbf{V}_n$  允许我们将外力不同地耦合到每个振幅  $Y_{i,n}$ 。在这里矩阵  $\mathbf{M}_n$  与时间无关，因为微分方程是不均匀的，因此两个独立解的总和通常不是同一微分方程的解。但是，由于作为源项与外力的特殊耦合，因此始终可以通过基于矩阵  $\mathbf{M}$  的对角化来精确求解该系统。

哈密顿量简化为  $H = \sum_n \lambda_n [\mathbf{M}_n \mathbf{Y}_n + \mathbf{V}_n \mathbf{U}(t)]$ ，因此控制方程(A-14)可简化为

$$\mathbf{U}(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n \lambda_n(t) \mathbf{V}_n \quad (\text{B-1})$$

在这种情况下，协态方程也会得到很大程度上的简化。如果我们根据乘积的组成部分重写乘积， $\lambda_n \mathbf{M}_n \mathbf{Y}_n = \sum_i \lambda_{i,n} \sum_j M_{i,j,n} Y_{j,n}$ ，那么  $\partial H / \partial Y_{k,n}$  得出  $\partial H / \partial Y_{k,n} = \sum_i \lambda_{i,n} M_{i,k,n} = \sum_i \lambda_{i,n} M_{k,i,n}^T$ ，其中上标 T 表示转置矩阵。换句话说，我们获得  $\partial H / \partial \mathbf{Y}_n = \mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}_n$ ，这样得到的协态方程  $d\boldsymbol{\lambda}_n/dt = -\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}_n$  和  $\boldsymbol{\lambda}_n(T) = \mathbf{w}_n$  不再取决于  $\mathbf{U}(t)$ 。换句话说，最优力场的超越方程(A-14)因此仅根据相关的拉格朗日函数  $\lambda_n(t)$  和  $\mathbf{V}_n$  就成为一个解。对于最终目标而言，这一观察结果具有重大意义，即从分别与每个系统相关联的  $N$  个最优力中预测所有  $N$  个系统的集体响应的最优力  $\mathbf{U}(t)$ ，用  $\mathbf{U}_{\text{opt},n}(t)$  表示：

$$\mathbf{U}_{\text{opt},n}(t) = (2\lambda_{0,n})^{-1} \lambda_n(t) \mathbf{V}_n \quad (\text{B-2})$$

因此，可以将集体最优函数  $\mathbf{U}_{\text{opt}}(t)$  重写为各个优化函数  $\mathbf{U}_{\text{opt},n}(t)$  与各个权重因子  $(2\lambda_{0,n}) \equiv \mathbf{a}_n$  的线性叠加。

$$\mathbf{U}_{\text{opt}}(t) = (2\lambda_0)^{-1} \sum_n \mathbf{a}_n \mathbf{U}_{\text{opt},n}(t) \quad (\text{B-3})$$

作为附带问题，我们注意到从归一化  $E = \int dt \mathbf{U}_{\text{opt},n}(t)^2 = \int dt [(2\lambda_{0,n})^{-1} \lambda_n \mathbf{V}_n]^2$  可以得到关系式  $(2\lambda_{0,n}) = E^{-1/2} [\int dt (\lambda_n \mathbf{V}_n)^2]^{1/2}$ 。由于拉格朗日函数  $\lambda_n(t)$  只是数学上的辅助函数，不能直接测量，因此我们必须说明权重因子  $\mathbf{a}_n \equiv (2\lambda_{0,n})$  与观测到的  $\mathbf{U}_{\text{opt},n}(t)$  有何关

系。

$U_{\text{opt},n}(t)$ 的时间导数在最后时间  $T$  的计算结果由下式给出：

$$\begin{aligned}
 dU_{\text{opt},n}(t)/dt|_{t=T} &\equiv U'_{\text{opt},n}(T) \\
 &= (2\lambda_{0,n})^{-1} (d\lambda_n(t)/dt|_{t=T}) \mathbf{V}_n \\
 &= -(2\lambda_{0,n})^{-1} (\mathbf{M}^T \lambda_n|_{t=T}) \mathbf{V}_n \\
 &= -(2\lambda_{0,n})^{-1} (\mathbf{M}^T \mathbf{w}_n) \mathbf{V}_n
 \end{aligned} \tag{B-4}$$

这样就可以通过  $\mathbf{a}_n = (2\lambda_{0,n})^{-1} (\mathbf{M}^T \mathbf{w}_n) \mathbf{V}_n / U'_{\text{opt},n}(T)$  构造权重因子。因此，我们得出了集体响应的叠加原理的最终形式。正如人们可能期望的那样， $\mathbf{a}_n$  与第  $n$  个系统的每个振幅  $\mathbf{Y}_{i,n}$  相关的权重因子  $w_{i,n}$  线性相关。值得注意的是，一旦为每个系统确定了最优场  $U_{\text{opt},n}(t)$ ，还需要确定其在端点  $T$  处的时间导数，以便预测集体响应的最优力场。各个优化函数  $U_{\text{opt},n}(t)$  在最后时刻的斜率越大， $U_{\text{opt},n}(t)$  对集合系统的优化贡献就越小。

## 参 考 文 献

- [1]D. Strickland, G. Mourou, “*Compression of amplified chirped optical pulses*”. *Optics Communications*, **1985**, 55: 447-449.
- [2]P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, G. Mourou. “*Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification*”. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **1988**, 24: 398-403.
- [3]S. W. Bahk, P. Rousseau *et al.*, “*Generation and characterization of the highest laser intensities ( $10^{22}$  W/cm<sup>2</sup>)*”. *Opt. Lett.*, **2004**, 29: 2837-2839.
- [4]V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau *et al.* “*Ultra-high intensity-300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate*”. *Opt. Exp*, **2008**, 16: 2109-2114.
- [5]J. F. Ong, W. R. Teo, Toseo Moritaka, and H. Takabe, “*Radiation reaction in the interaction of ultraintense laser with matter and gamma ray source*”. *Physics of Plasmas*, **2016**, 23, 053117.
- [6]A. Di Piazza, C. Müller, K. Z. Hatsagortsyan *et al.* “*Extremely high-intensity laser in-teractions with fundamental quantum systems*”. *Rev. Mod. Phys.* **2011**, 84(3): 1177–1228.
- [7]M. Tamburini, F. Pegoraro, A. Di. Piazza *et al.* “*Radiation reaction effects on radiation pressure acceleration*”. *New J. Phys*, **2010**, 12: 123005.
- [8]S. S. Bulanov, *et al.*, “*Schwinger Limit Attainability with Extreme Power Lasers*”. *Phys. Rev. Lett*, **2010**, 105: 220407.
- [9]W. Heisenberg, H. Euler, “*Consequences of Dirac's theory of positrons*”. *Z.Phys.* 98 (**1936**) 11-12, 714-732
- [10]V.F. Weisskopf. “*On the Self-Energy and the Electromagnetic Field of the*

- Electron*". *Phys. Rev.* 56 (1939) 72-85.
- [11] J. Schwinger. "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization". *Physical Review*, **1951**, 82(5): 664-769.
- [12] ATLAS Collaboration. "Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC". *Nature Phys*, **2017**, 13, 852–858.
- [13] S. I. Kruglov. "Vacuum birefringence from the effective Lagrangian of the electromagnetic field". *Phys. Rev. D*, **2007**, 75, 117301.
- [14] D. L. Burke *et al.* "Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering". *Phys. Rev. Lett.*, **1997**, 79: 1626.
- [15] P.A.M. Dirac. "The quantum theory of the electron". *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **1928**, 117:610-624.
- [16] W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski. "The Hole Theory". In: Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, **1985**.
- [17] Klein O. "Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac". *Zeitschrift für Physik*, **1929**, 53(3):157-165.
- [18] F. Sauter. "Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs". *Zeitschrift für Physik*, **1931**, 69(11):742-764.
- [19] Carl D. Anderson and Seth H. Neddermeyer. "Positrons from Gamma-Rays". *Phys. Rev.*, **1933**, 43, 1034.
- [20] François Gelis, Naoto Tanji, "Schwinger mechanism revisited". *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **2016**, Volume 87, Pages 1-49.
- [21] E. Brezin and C. Itzykson. "Pair Production in Vacuum by an Alternating Field". *Phys. Rev. D*, **1970**, 2, 1191.
- [22] Q. Z. Lv, S. Dong *et al.* "Role of the spatial inhomogeneity on the laser-induced vacuum decay". *Phys. Rev. A*, **2018**, 97, 022515.
- [23] S. Augustin. "Bethe–Heitler Pair Creation in a Bichromatic Laser Field", 2014.

- [24] Holger Gies and Klaus Klingmüller. “Pair production in inhomogeneous fields”. *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 065001.
- [25] Gerald V. Dunne and Christian Schubert, “Worldline instantons and pair production in inhomogeneous fields”. *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 105004.
- [26] Cesim K. Dumlu and Gerald V. Dunne, “Stokes Phenomenon and Schwinger Vacuum Pair Production in Time-Dependent Laser Pulses”. *Phys. Rev. Lett.*, **2010**, 104, 250402.
- [27] Y. Kluger *et al.* “Pair production in a strong electric field”. *Phys. Rev. Lett.*, **1991**, 67, 2427.
- [28] J. W. Braun, Q. Su, and R. Grobe, “Numerical approach to solve the time-dependent Dirac equation”. *Phys. Rev. A*, **1999**, 59, 604.
- [29] N. N. Bogolyubov. “On a new method in the theory of superconductivity”. *Nuovo Cimento*, **1958**, 7 (6): 794–805.
- [30] D. Z. Du, P. M Pardalos, W. Wu, “History of Optimization”. In Floudas, C.; Pardalos, P. (eds.). *Encyclopedia of Optimization*. Boston: Springer. **2008**, pp. 1538–1542.
- [31] R. W. H. Sargent, “Optimal Control”. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2000**, 124 (1–2): 361–371.
- [32] C. Kohlfürst, M. Mitter, G. von Winckel, F. Hebenstreit, and R. Alkofer, “Optimizing the pulse shape for Schwinger pair production”. *Phys. Rev. D*, **2013**, 88, 045028.
- [33] F. Hebenstreit and F. Fillion-Gourdeau, “Optimization of Schwinger pair production in colliding laser pulses”. *Phys. Lett. B*, **2014**, 739:189-195.
- [34] Q. Z. Lv, J. Unger *et al.* “Spatially dependent electron-positron pair creation rate”. *Europhys. Lett*, **2016**, 116, 40003.
- [35] R. Dechter, “Constraint Processing”. Morgan Kaufmann, San Francisco, **2003**.
- [36] J. J. Leader, “Numerical Analysis and Scientific Computation”. Addison-Wesley, Boston, **2004**.

- [37] W. Sun and Y. X. Yuan, “*Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*”. Springer, Berlin, **2010**.
- [38] B. Thaller, “*The Dirac Equation*”. Springer, Berlin, **1992**.
- [39] J. A. Fleck, J. R. Morris, and M. D. Feit, “*Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere*”. *Appl. Phys.*, **1976**, 10, 129.
- [40] A. D. Bandrauk and H. Shen, “*High-order split-step exponential methods for solving coupled nonlinear Schrodinger equations*”. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **1994**, 27, 7147.
- [41] G. R. Mocken and C. H. Keitel, “*FFT-split-operator code for solving the Dirac equation in 2+1 dimensions*”. *Comput. Phys. Commun.*, **2008**, 178, 868.
- [42] M. Ruf, H. Bauke, and C. H. Keitel, “*A real space split operator method for the Klein-Gordon equation*”. *J. Comput. Phys.*, **2009**, 228, 9092-9106.
- [43] F. Hund, “*Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie*”. *Zeitschrift für Physik.*, **1941**, 117, 1-17.
- [44] Q. Z. Lv *et al.* “*Pair creation for bosons in electric and magnetic fields*”. *Phys. Rev. A*, **2013**, 87, 023416.
- [45] G. V. Dunne and T. M. Hall, “*Borel summation of the derivative expansion and effective actions*”. *Phys. Rev. D*, **1999**, 60, 065002.
- [46] M. Jiang, Q. Z. Lv, Z. M. Sheng, R. Grobe, and Q. Su, “*Enhancement of electron-positron pair creation due to transient excitation of field-induced bound states*”. *Phys. Rev. A*, **2013**, 87, 042503.
- [47] A. Hansen and F. Randal, “*Klein's Paradox and Its Resolution*”. *Phys. Scr.*, **1981** 23, 1036.
- [48] B. R. Holstein, “*Klein's paradox*”. *Am. J. Phys.*, **1998**, 66, 507.
- [49] N. Dombey and A. Calogeracos, “*Seventy years of the Klein paradox*”. *Phys. Rep.*, **1999**, 315, 41-58.
- [50] B. R. Holstein, “*Strong field pair production*”. *Am. J. Phys.*, **1999**, 67, 499.

- [51]P. Krekora, Q. Su, and R. Grobe, “*Klein Paradox in Spatial and Temporal Resolution*”. *Phys. Rev. Lett.*, **2004**, 92, 040406.
- [52]P. Krekora, Q. Su, and R. Grobe, “*Klein paradox with spin-resolved electrons and positrons*”. *Phys. Rev. A*, **2005**, 72, 064103.
- [53]A. T. Steinacher, R. E. Wagner, Q. Su, and R. Grobe, “*Impact of interfermionic forces on the pair-creation process*”. *Phys. Rev. A*, **2014**, 89, 032119.
- [54]N. I. Chott, Q. Su, and R. Grobe, “*Classical-quantum correspondence in electron-positron pair creation*”. *Phys. Rev. A*, **2007**, 76, 010101.
- [55]F. Hebenstreit, J. Berges, and D. Gelfand, “*Real-Time Dynamics of String Breaking*”. *Phys. Rev. Lett.*, **2013**, 111,201601.
- [56]I. Bialynicki-Birula, P. Gornicki, and J. Rafelski, “*Phase-space structure of the Dirac vacuum*”. *Phys. Rev. D.*, **1991**, 44, 1825.
- [57]F. Hebenstreit, R. Alkofer, and H. Gies, “*Particle Self-Bunching in the Schwinger Effect in Spacetime-Dependent Electric Fields*”. *Phys. Rev. Lett.*, **2011**, 107,180403.
- [58]H. Gies and K. Klingmüller, “*Pair production in inhomogeneous fields*”. *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 065001.
- [59]G. V. Dunne and C. Schubert, “*Worldline instantons and pair production in inhomogenous fields*”. *Phys. Rev. D*, **2005**, 72, 105004.
- [60]F. Hebenstreit, J. Berges, and D. Gelfand, “*Simulating fermion production in 1+1 dimensional QED*”. *Phys. Rev. D*, **2013**, 87,105006.
- [61]D. E. Kirk, “*Optimal Control Theory: An Introduction*”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, **1970**.
- [62]R. Dechter, “*Constraint Processing*”. Morgan Kaufmann, Burlington, MA, **2003**.
- [63]J. Werschnik and E. K. U Gross, “*Quantum optimal control theory*”. *J. Phys. B*, **2007**, 40(18), R175-R211.
- [64]A. G. Butkovskiy and Y. I. Samoilenko, “*Control of Quantum Mechanical Processes*

- and Systems*". Kluwer Academic, Dordrecht, **1990**.
- [65] J. Zabczyk, "Mathematical Control Theory". Birkhauser, Basel, Switzerland, **1990**.
- [66] T. Brixner *et al.* "Quantum Control by Ultrafast Polarization Shaping". *Phys. Rev. Lett.*, **2004**, 92, 208301.
- [67] V. Ramakrishna, R. Ober, X. Sun, O. Steuernagel, J. Botina, and H. Rabitz, "Explicit generation of unitary transformations in a single atom or molecule". *Phys. Rev. A*, **2000**, 61, 032106.
- [68] S. G. Schirmer, H. Fu, and A. I. Solomon, "Complete controllability of quantum systems". *Phys. Rev. A*, **2001**, 63, 063410.
- [69] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterlin, and B. P. Flannery, "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing". Cambridge University Press, New York, **1992**.
- [70] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients". *Comput. J.*, **1964**, 7, 149-154.
- [71] L. Allen and J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two-Level Atoms". John Wiley & Sons, Inc., New York, **1975**.
- [72] P. Milonni and J. H. Eberly, "Lasers". Wiley, New York, **1988**.
- [73] B. S. Xie, Z. L. Li, and S. Tang, "Electron-positron pair production in ultrastrong laser fields". *Matter and Radiation at Extremes*, **2017**, 2, 225.
- [74] C. Kohlfürst, "Electron-Positron Pair Production in Structured Pulses of Electric Fields". Master's thesis, Graz University, **2012**, arXiv:1212.0880.
- [75] S. S. Dong, M. Chen, Q. Su, and R. Grobe, "Optimization of spatially localized electric fields for electron-positron pair creation". *Phys. Rev. A*, **2017**, 96, 032120.
- [76] N. B. Narozhny and A. I. Nikishov, "The simplest Processes in a Pair-Producing Field". *Sov. J. Nucl. Phys.*, **1970**, 11, 596.
- [77] V. S. Popov, "Production of  $e^+e^-$  Pairs in an Alternating External Field". *JETP Lett.*, **1971**, 13, 185-187.

- [78] V.S. Popov, "Pair production in a variable external field (quasiclassical approximation)". *Sov. Phys. JETP*, **1972**, 34, 709-718.
- [79] W. Y. Wu, F. He, R. Grobe, and Q. Su, "Creation of electron-positron pairs in oscillating electric fields". *J. Opt. Soc. Am. B*, **2015**, 32(9), 2009-2018.
- [80] S. Dong *et al.* "Superposition principle for the simultaneous optimization of collective responses". *Phys. Rev. E*, **2018**, 98, 012221.
- [81] G. R. Mocken, M. Ruf, C. Müller, and C. H. Keitel, "Nonperturbative multiphoton electron-positron-pair creation in laser fields". *Phys. Rev. A*, **2010**, 81, 022122.
- [82] L. Allen and J. H. Eberly, "Optical Resonance and Two-Level Atoms". *Wiley, New York*, **1975**.
- [83] E. Polak and G. Ribière, *Rev. Franc. Inf. Recherche Oper.*, **1969**, 3, 35.
- [84] R. E. Wagner, M. R. Ware, Q. Su, and R. Grobe, "Exponential enhancement of field-induced pair creation from the bosonic vacuum". *Phys. Rev. A*, **2010**, 81, 052104.
- [85] W. Su, M. Jiang, Z. Q. Lv, Y. J. Li, Z. M. Sheng, R. Grobe, and Q. Su, "Suppression of pair creation due to a steady magnetic field". *Phys. Rev. A*, **2012**, 86, 013422 .
- [86] Q. Z. Lv, S. Dong *et al.* "Quantum-mechanical approach to the laser-assisted vacuum decay". *Phys. Rev. A*, **2018**, 97, 053416.
- [87] S. Schmidt *et al.* "A Quantum Kinetic Equation for Particle Production in the Schwinger Mechanism". *Int. J. Mod. Phys. E*, **1998**, 7, 709.
- [88] Y. Kluger, E. Mottola, and J. M. Eisenberg, "Quantum Vlasov equation and its Markov limit", *Phys. Rev. D*, **1998**, 58, 125015.
- [89] J. C. R. Bloch *et al.* "Pair creation: Back reactions and damping". *Phys. Rev. D*, **1999**, 60, 116011.
- [90] R. Alkofer, M. B. Hecht, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and D.V. Vinnik, "Pair Creation and an X-Ray Free Electron Laser", *Phys. Rev. Lett.*, **2001**, 87, 193902.

- [91] A. M. Fedotov, E. G. Gelfer, K. Y. Korolev, and S. A. Smolyansky, “Kinetic equation approach to pair production by a time-dependent electric field”. *Phys. Rev. D*, **2011**, 83, 025011.
- [92] J. Unger, S. Dong, R. Flores, Q. Su, and R. Grobe, “Relationship of the pair creation yield during and after the interaction”. *Las. Phys.*, **2019**, 29, 065302.
- [93] T. Cheng, Q. Su, and R. Grobe, “Introductory review on quantum field theory with space-time resolution”. *Contemp. Phys.*, **2010**, 51, 315.
- [94] M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr., and A. Steiger, “Solution of the Schrödinger Equation by a Spectral Method”. *J. Comput. Phys.*, **1982**, 47, 412.
- [95] A. D. Bandrauk and H. Shen, “Exponential split operator methods for solving coupled time-dependent Schrödinger equations”. *J. Chem. Phys.*, **1993**, 99, 1185.
- [96] P. Krekora, Q. Su, and R. Grobe, “Interpretational difficulties in quantum field theory”. *Phys. Rev. A*, **2006**, 73, 022114.
- [97] T. Cheng, M. R. Ware, Q. Su, and R. Grobe, “Pair creation rates for one-dimensional fermionic and bosonic vacua”. *Phys. Rev. A*, **2009**, 80, 062105.
- [98] Q. Z. Lv, Q. Su, and R. Grobe, “Manipulation of the Vacuum to Control Its Field-Induced Decay”. *Phys. Rev. Lett.*, **2018**, 121, 183606.
- [99] R. Schützhold, H. Gies, and G. Dunne, “Dynamically Assisted Schwinger Mechanism”. *Phys. Rev. Lett.*, **2008**, 101, 130404.
- [100] G. V. Dunne, H. Gies, and R. Schützhold, “Catalysis of Schwinger vacuum pair production”. *Phys. Rev. D*, **2009**, 80, 111301.

## 致 谢

时光飞逝，如白驹过隙，转眼间四年的博士研究生阶段已近尾声。在即将毕业之际，我要对曾经帮助过我的人表达最诚挚的谢意。

首先要感谢我的导师盛政明教授和陈民教授。盛老师在学术上治学严谨，成果颇丰；工作上态度端正，充满热情；在指导学生时认真负责，不厌其烦地对一些细节性的问题进行深入讨论。陈老师年轻有为，学识渊博，具有敏锐的洞察力。陈老师一般很早就会抵达办公室，以身作则，为同学们树立了很好的榜样，他对学生也非常关心，从学习到生活都无微不至的关照。两位老师从课题组的科研发展考虑，针对当前强场物理的发展趋势，希望在本组开展 QED-等离子体物理研究。陈老师说我们要将其中的 QED 真正作为“名词”而不是仅作为“形容词”来研究。他们结合我硕士期间的研究工作，鼓励我在博士工作主要开展 QED 物理方面的研究，帮助我申请教育部留学基金委的访问交流项目，去美国伊利诺伊州立大学物理系学习和开展 QED 物理的相关研究。在我回国后，又积极鼓励和指导我开展 QED-等离子体物理的研究，进一步拓展研究深度和广度，并在博士论文撰写阶段，对我的论文进行了逐字逐句地修改和完善。我非常有幸能够师从两位老师进行学术研究，在此向他们表示衷心的感谢。

我还要感谢伊利诺伊州立大学物理系的苏其昌教授和 Rainer Grobe 教授，他们作为教育部留学基金委访问交流项目的美方合作导师，在本人博士二年级和三年级期间，邀请并资助我来到课题组交换学习。本论文的主要工作是在两位教授的悉心指导下完成的。苏老师治学态度严谨，在学术细节上一丝不苟，公式推导细致入微；Grobe 教授思想活跃，经常会有新的想法冒出，并且在数值计算方面有着很深造诣。这些都潜移默化的影响和鼓舞着我。在我为期两年的美国之行中，还得到了很多人的帮助和支持，在此向他们一并表示最诚挚的感谢。

在此我还要感谢上海交通大学激光等离子体实验室的何峰老师、翁苏明老师、刘峰老师、远晓辉老师、陈黎明老师、谢国强老师等对我的关心和帮助，感谢各位老师

建立起的浓厚学术氛围和有效研究生培养机制，为各位同学提供了良好的学习环境。

感谢在马普核物理所做博后的吕清正师兄在科研工作中对我的帮助和指导。吕师兄学习勤奋，学识渊博，工作态度严谨认真，在极强场和真空相互作用这一研究领域有很高的造诣。我在研究工作中遇到的问题，一般情况下吕师兄都能提供合理的解释或是靠谱的建议，从而帮助我在科研上不断进步。

感谢实验室的何沛伦同学，他让我见识到了一位出色的博士研究生应该具备什么样的科研素质，他在研究的深度和广度上都是我完全无法企及的，我真的很荣幸认识这样一位优秀的同龄人。感谢张高维同学，我们作为同一批进入理论组盛老师名下读博的同届同班同学，一路走来建立了深厚友谊。感谢同办公室的余继晔同学，在一起走向毕业的过程中，余同学给予了我不少帮助和支持。感谢已经硕士毕业了的沈众辰师弟，沈同学当时是同办公室和我共同话题最多的一位。感谢同办公室的朱兴龙同学，朱兴龙同学工作勤奋认真，成果丰厚，是308办公室的榜样。感谢308办公室的刘维媛、祝昕哲、安相炎、陈真、陈翔等，你们给整个办公室带来了许多欢声笑语。最后感谢实验室以及上海交大的其他各位和我认识的同学们，感谢你们的帮助和鼓励，是你们的真诚友谊伴我走过了这难忘的博士研究生时光。

感谢我的父母和亲朋好友，他们一直以来在背后的支持，使自己能够坦然地面对各种困难，并将激励自己在以后的人生道路中不断前进。

最后，感谢教育部留学基金委为我提供在美交换期间的资金资助。

## 攻读博士学位期间已发表或录用的论文

- [1]. **S. Dong**, M. Chen, Q. Su, R. Grobe. Optimization of spatially localized electric fields for electron-positron pair creation [J], Phys. Rev. A 96, 032120 (2017).
- [2]. Q. Z. Lv, **S. Dong**, Y. T. Li, Z. M. Sheng, et al., Role of the spatial inhomogeneity on the laser-induced vacuum decay[J]. Phys. Rev. A 97, 022515 (2018).
- [3]. **S. Dong**, R. Flores, J. Unger, Q. Su, and R. Grobe. Superposition principle for the simultaneous optimization of collective responses[J], Phys. Rev. E 98, 012221 (2018)
- [4]. Q. Z. Lv, **S. Dong**, C. Lisowski, R. Pelphey, et al., Quantum-mechanical approach to the laser-assisted vacuum decay[J], Phys. Rev. A 97, 053416 (2018).
- [5]. J. Unger, **S. Dong**, R. Flores, Q. Su, R. Grobe, Infinite-dimensional optimization applied to pair creation from the vacuum[J], Phys. Rev. A 99, 022128 (2019).
- [6]. J. Unger, **S. Dong**, et al. Relationship of the pair creation yield during and after the interaction[J], Laser Phys. 29 065302 (2019).
- [7]. J. Unger, **S. Dong**, Q. Su, and R. Grobe. Optimal supercritical potentials for the electron-positron pair-creation rate[J], Phys. Rev. A 100, 012518 (2019).
- [8]. **S. Dong**, J. Unger, J. Bryan, Q. Su, and R. Grobe. Symbiotic versus nonsymbiotic optimization for spatial and temporal degrees of freedom in pair creation[J], Phys. Rev. E 101, 013310 (2020).